

The Project Gutenberg EBook of Randwertaufgaben bei Systemen von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, by Wallie Abraham Hurwitz

This eBook is for the use of anyone anywhere at no cost and with almost no restrictions whatsoever. You may copy it, give it away or re-use it under the terms of the Project Gutenberg License included with this eBook or online at www.gutenberg.org

Title: Randwertaufgaben bei Systemen von linearen partiellen Differentialgleichungen

Author: Wallie Abraham Hurwitz

Release Date: August 2, 2010 [EBook #33330]

Language: German

Character set encoding: ISO-8859-1

*** START OF THIS PROJECT GUTENBERG EBOOK SYSTEMEN VON LINEAREN PARTIELLEN ***

Produced by Andrew D. Hwang, Ralf Stephan, Joshua Hutchinson
and the Online Distributed Proofreading Team at
<http://www.pgdp.net> (This file was produced from images
from the Cornell University Library: Historical Mathematics
Monographs collection.)

ANMERKUNGEN DER KORREKTURLESER

Ein Exemplar des Originals wurde dankenswerterweise von der Cornell University Library: Historical Mathematics Monographs Collection zur Verfügung gestellt.

Kleinere typographische Korrekturen und Änderungen der Formatierung wurden stillschweigend vorgenommen.

Diese PDF-Datei wurde für die Anzeige auf einem Bildschirm optimiert, kann bei Bedarf aber leicht für den Druck angepasst werden. Anweisungen dazu finden Sie am Anfang des LaTeX-Quelltextes.

Randwertaufgaben bei Systemen von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Wallie Abraham Hurwitz.

Randwertaufgaben bei Systemen von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät der Georg-August-Universität

zu Göttingen

vorgelegt von

Wallie Abraham Hurwitz

aus Joplin, Missouri, V. St. A.

Göttingen 1910.

Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei
(W. Fr. Kaestner).

Tag der mündlichen Prüfung: 13. Juli 1910.

Referent: Herr Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Hilbert.

Meinen lieben Eltern.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	6
Erstes Kapitel. Die Normalformen der Gleichungssysteme.	
§ 1. Die charakteristische Differentialform.	8
§ 2. Die Normalformen der Gleichungssysteme.	14
Zweites Kapitel. Das elliptische System.	
§ 3. Hilfsmittel zur Theorie des elliptischen Systems.	30
§ 4. Lösung der Randwertaufgabe für das elliptische System.	52
Drittes Kapitel. Das hyperbolische System.	
§ 5. Lösung der Randwertaufgabe für das hyperbolische System.	61
Viertes Kapitel. Das parabolische System.	
§ 6. Hilfsmittel zur Theorie des parabolischen Systems.	67
§ 7. Lösung der Randwertaufgabe für das parabolische System.	86

Einleitung.

Bei Untersuchungen allgemeinen Charakters über lineare partielle Differentialgleichungen sind zwei Problemstellungen von besonderer Wichtigkeit. Die Anfangswertaufgabe oder das Cauchysche Problem versucht, eine Lösung durch Angabe ihrer Werte und der Werte gewisser Ableitungen auf einer Kurve zu bestimmen; dabei werden alle vorkommenden Funktionen in einer kleinen Nachbarschaft der Kurve, sowie die Kurve selbst und die vorgeschriebenen Werte in einer kleinen Nachbarschaft eines Punktes als analytisch vorausgesetzt; und die Lösung wird als analytische Funktion in einer eventuell noch kleinern Nachbarschaft gesucht: das Problem ist hervorragend als analytisches Problem im kleinen zu bezeichnen¹⁾. Dagegen fordert die Randwertaufgabe oder das Dirichletsche Problem von den gegebenen und gesuchten Funktionen nur Stetigkeit und die Existenz und Stetigkeit einer geringen Anzahl von Ableitungen, schreibt die Werte auf einem ganzen vorgegebenen Kurvenstück vor, und sucht die Lösung in einem ganzen vorgegebenen Gebiet; das Problem ist ein nicht-analytisches Problem im großen. Um die Zulassung einer größeren Nachbarschaft auszugleichen, muß sich eine Randwertaufgabe in der Regel begnügen, weniger Anforderungen als die Anfangswertaufgabe beim Vorschreiben der Werte längs der Kurve zu machen.

Für einzelne Gleichungen, sowie für Gleichungssysteme läßt sich das Cauchysche Problem durch die Majorantenmethode erledigen; dagegen geschieht gewöhnlich die Lösung des Dirichletschen Problems erst durch Überlegungen von schwierigerem Charakter. Diese Ueberlegungen sind bis jetzt, wie Sommerfeld in seinem Bericht über Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen besonders erwähnt²⁾, nur

¹⁾ Die Einschränkung auf ein kleines Gebiet ist manchmal teilweise durch das Prinzip der analytischen Fortsetzung oder andere Methoden zu beseitigen; doch tritt hier sogleich die Notwendigkeit von Eindeutigkeitstheoremen und damit verwandten Sätzen ein, welche das Problem aus dem wirklichen Rahmen des Cauchyschen Problems ausschließen.

²⁾ Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften Bd. 2, S. 506.

für einzelne Differentialgleichungen durchgeführt, und zwar meistens für Gleichungen zweiter Ordnung; noch nicht aber für Gleichungssysteme. In den letzten Jahren haben die Betrachtungen für Gleichungen zweiter Ordnung in den verschiedenen Fällen, welche notwendig vorkommen, durch die Methode der Integralgleichungen eine einheitliche Gestalt angenommen.

Die Anregung zu solchen Problemstellungen ist von der Physik ausgegangen; aus den Theorien des Potentials, der schwingenden Saite und der Wärmeleitung sind die Hilfsmittel entstanden, welche zur Lösung von Randwertaufgaben bei allgemeineren Differentialgleichungen zweiter Ordnung beigetragen haben. Von rein mathematischem Standpunkt aus erscheint es gewissermaßen näher liegend, zunächst Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung zu studieren. Für gewöhnliche Differentialgleichungen hat Bôcher von diesem Gesichtspunkte aus die Theorie von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unbekanntem Funktionen untersucht¹⁾. Die vorliegende Arbeit, welche auf Anregung von Herrn Geheimrat Hilbert entstand, soll für partielle Differentialgleichungen einen ersten Schritt in derselben Richtung machen, indem für Systeme erster Ordnung mit zwei unbekanntem Funktionen und zwei unabhängigen Variablen die Randwertaufgabe gelöst wird. Als naturgemäße Methode bietet sich auch hier die Methode der Integralgleichungen dar und wird mit Erfolg angewandt.

Im ersten Kapitel wird eine Klassifikation solcher Systeme gemacht und eine Reduktion auf Normalformen erreicht. Nach Aussonderung gewisser, von unserm Standpunkte aus trivialer Fälle bleiben drei Hauptformen zu untersuchen, welche den Gegenstand des zweiten, dritten und vierten Kapitels bilden. Es ist nicht beabsichtigt worden, die Schwierigkeiten dadurch zu erhöhen, daß möglichst große Allgemeinheit den in Betracht kommenden Funktionen erteilt wird; sondern der Zweck ist vielmehr gewesen, unter genauer Angabe der Voraussetzungen hinreichende Bedingungen für die Lösung des Problems zu geben.

¹⁾ Transactions of the American Mathematical Society, Bd. 3 (1902), S. 196–215.

Erstes Kapitel.

Die Normalformen der Gleichungssysteme.

§ 1. Die charakteristische Differentialform.

Bei Untersuchungen über einzelne partielle Differentialgleichungen im allgemeinen und die linearen Gleichungen insbesondere ist stets der Begriff der sogenannten charakteristischen Kurven von großer Bedeutung. Diesen Begriff wollen wir zunächst in diesem Paragraphen auf Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ausdehnen und einige Folgen daraus herleiten. Da es sich hier nur um formale Fragen handelt, wollen wir einfach annehmen, alle vorkommenden Funktionen seien analytisch.

I. Wir betrachten das System von Differentialgleichungen:

$$1) \quad \lambda_p(u) \equiv \sum_{q=1}^n a_{pq} \frac{\partial u_q}{\partial x} + \sum_{q=1}^n b_{pq} \frac{\partial u_q}{\partial y} + \sum_{q=1}^n c_{pq} u_q = 0 \quad [q = 1, 2 \dots n]$$

Hierbei sind a_{pq} , b_{pq} , c_{pq} gegebene, in einem vorgeschriebenen Bereich der xy -Ebene reguläre Funktionen von x , y .

Es sei gegeben ein vorläufig willkürliches System von Funktionen

$$u_1(x, y), u_2(x, y), \dots u_n(x, y).$$

Geometrisch entspricht jeder Funktion $u_q(x, y)$ eine Fläche im xy -Raume, deren Gleichung

$$z = u_q(x, y)$$

ist. Es sei ferner eine willkürliche Kurvenschar in der xy -Ebene derart gegeben, daß durch jeden Punkt des Bereiches eine und nur eine Kurve der Schar hindurchgeht. Damit ist jedem Punkte (x, y) eine Richtung — die Tangentialrichtung durch den Punkt — zugeordnet, die durch das Verhältnis $dx : dy$ bestimmt ist. Dem Punkte (x, y) entspricht auch auf jeder der n -Flächen ein Punkt (x, y, u_q) , und der Richtung $dx : dy$ eine Richtung $dx : dy : du_q$, wobei die neuen Größen u_q , du_q durch die Gleichungen

$$u_q = u_q(x, y), \quad du_q = \frac{\partial u_q(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial u_q(x, y)}{\partial y} dy$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dx & dy & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & dx & dy \\ a_{11} & b_{11} & \dots & a_{1n} & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_{n1} & \dots & a_{nn} & b_{nn} \end{vmatrix}$$

d. h.

9)
$$\Delta = J^n \delta$$

oder, mit Worten ausgesprochen:

Die charakteristische Differentialform ändert sich bei der Transformation 4) nur um einen Faktor, die n -te Potenz der Funktionaldeterminante.

III. Es sei jetzt eine lineare Transformation der Funktionen u_1, u_2, \dots, u_n gegeben:

10)
$$u_p = \sum_{q=1}^n \alpha_{pq} U_q, \quad [p = 1, 2, \dots, n]$$

wo die α_{pq} Funktionen von x, y sind, deren Determinante nicht verschwindet:

11)
$$J = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Für die Transformation der Ableitungen von u_p haben wir:

12)
$$\begin{cases} \frac{\partial u_p}{\partial x} = \sum_{q=1}^n \alpha_{pq} \frac{\partial U_q}{\partial x} + \sum_{q=1}^n \frac{\partial \alpha_{pq}}{\partial x} U_q \\ \frac{\partial u_p}{\partial y} = \sum_{q=1}^n \alpha_{pq} \frac{\partial U_q}{\partial y} + \sum_{q=1}^n \frac{\partial \alpha_{pq}}{\partial y} U_q \end{cases}$$

Wir bekommen durch die Transformation neue Lineardifferentialformen 7), wo jetzt ¹⁾:

13)
$$\begin{cases} A_{pq} = \sum_{r=1}^n a_{pr} \alpha_{rq} \\ B_{pq} = \sum_{r=1}^n b_{pr} \alpha_{rq} \end{cases}$$

¹⁾ Die aus 12) entstehenden Glieder, die U_q enthalten, setzen sich mit den andern vorkommenden Gliedern in U_q zusammen, kommen daher hier nicht in Betracht.

Hier sind a_{pq} , sowie auch b_{pq} kontragredient mit u_p transformiert. Für die neue charakteristische Differentialform haben wir:

$$\Delta = \begin{vmatrix} dx & dy & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & dx & dy \\ A_{11} & B_{11} & \dots & A_{1n} & B_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & B_{n1} & \dots & A_{nn} & B_{nn} \end{vmatrix}$$

Die Koeffizienten der einzelnen Produkte $dx^p dy^{n-p}$ in δ sind gewisse n -reihige Determinanten d aus der Matrix der Koeffizienten a, b des Systems 1); die Koeffizienten der entsprechenden Glieder in Δ sind die entsprechenden transformierten Determinanten D ; dx, dy sind unverändert. Für jede solche Determinante gilt aber, wenn wir mit h_{pq} irgend eine der beiden Größen a_{pq}, b_{pq} , mit H_{pq} die entsprechende transformierte Größe bezeichnen:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} H_{11} & \dots & H_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{n1} & \dots & H_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{r=1}^n h_{1r}\alpha_{r1} & \dots & \sum_{r=1}^n h_{1r}\alpha_{rn} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{r=1}^n h_{nr}\alpha_{r1} & \dots & \sum_{r=1}^n h_{nr}\alpha_{rn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{n1} & \dots & h_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{1n} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = Jd. \end{aligned}$$

Da dies für jeden Koeffizienten in δ gilt, so ist

$$\Delta = J\delta,$$

also

Die charakteristische Differentialform ändert sich unter der Transformation 10) nur um einen Faktor, die Determinante der Transformation.

IV. Wir wollen schließlich untersuchen, was aus der Form δ wird, wenn wir das System 1) mittels linearer Zusammensetzung verändern. Wir schreiben also:

$$15) \quad A_p(u) = \sum_{q=1}^n \alpha_{pq} \lambda_q(u), \quad [p = 1, 2, \dots, n]$$

wo α_{pq} Funktionen von x, y sind, deren Determinante nicht verschwindet:

$$16) \quad J = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Wir bekommen das neue System 7), wo aber jetzt:

$$17) \quad \begin{cases} A_{pq} = \sum_{r=1}^n \alpha_{pr} a_{rq} \\ B_{pq} = \sum_{r=1}^n \alpha_{pr} b_{rq}. \end{cases}$$

Hier sind sowohl a_{pq} als auch b_{pq} kogredient mit $\lambda_q(u)$ transformiert. Wir sehen genau wie vorhin, daß

$$18) \quad \Delta = J\delta.$$

Die charakteristische Differentialform ändert sich unter der Transformation 15) nur um einen Faktor, die Determinante der Transformation.

V. Schließlich können wir das Wesentliche der vorigen Sätze in folgender Aussage über die Gleichung $\delta = 0$ zusammenfassen:

Bei beliebigen, nicht singulären Transformationen der unabhängigen Variablen, linearen, nicht singulären Transformationen der unbekanntenen Funktionen und linearen, nicht singulären Zusammensetzungen der einzelnen Gleichungen des Systems, bleibt die Gleichung der Charakteristiken des Systems invariant.

§ 2. Die Normalformen der Gleichungssysteme.

Von jetzt ab beschränken wir uns auf Systeme von zwei Gleichungen mit zwei unbekanntenen Funktionen. Wir wollen in diesem Paragraphen aus der Beschaffenheit der charakteristischen Differentialform und anderen damit verbundenen Begriffen eine Klassifikation der Systeme herausziehen, und die einzelnen Klassen auf Normalformen reduzieren. Es wird hier beständig das Zeichen $\mathfrak{L}(u, v)$ gebraucht, um irgend eine lineare Funktion von u, v zu bezeichnen, deren Koeffizienten Funktionen von x, y sind; der Gebrauch des Symbols $\mathfrak{L}(u, v)$, um gleichzeitig mehrere verschiedene lineare Funktionen zu bezeichnen, wird keine Ungenauigkeit hervorrufen.

I. Wir betrachten das System:

$$1) \quad \begin{cases} \lambda_1 \equiv a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + b_{11} \frac{\partial u}{\partial y} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial x} + b_{12} \frac{\partial v}{\partial y} = \mathfrak{L}(u, v) \\ \lambda_2 \equiv a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + b_{21} \frac{\partial u}{\partial y} + a_{22} \frac{\partial v}{\partial x} + b_{22} \frac{\partial v}{\partial y} = \mathfrak{L}(u, v). \end{cases}$$

Die charakteristische Differentialform ist:

$$2) \quad \delta \equiv \begin{vmatrix} dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \\ a_{11} & b_{11} & a_{12} & b_{12} \\ a_{21} & b_{21} & a_{22} & b_{22} \end{vmatrix}$$

oder

$$3) \quad -\delta = p dx^2 + 2q dx dy + r dy^2,$$

wo

$$4) \quad \begin{cases} p = & \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \\ 2q = - & \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ r = & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Setzen wir $\delta = 0$, so haben wir eine quadratische Gleichung für das Verhältnis $dx : dy$. Die weitere Diskussion beruht hauptsächlich auf dem Charakter der Wurzeln dieser Gleichung.

Ist in einem Punkte P $pr - q^2 > 0$, so gibt es keine reellen Wurzeln der Gleichung $\delta = 0$; es existieren keine (reellen) Charakteristiken durch P . Wir sagen, der Punkt P ist ein elliptischer Punkt des Systems 1), oder auch, 1) ist ein elliptisches System in P .

Ist in einem Punkte P $pr - q^2 < 0$, so gibt es in diesem Punkte zwei reelle Wurzeln der Gleichung $\delta = 0$; wir haben also zwei Richtungen, die von den charakteristischen Kurven durch P angenommen werden können. Wir sagen, P ist ein hyperbolischer Punkt von 1), oder 1) ist ein hyperbolisches System in P .

Ist $pr - q^2 = 0$, aber wenigstens eine der Größen p, q, r von Null verschieden in einem Punkte P , so gibt es in P eine (doppelte) Wurzel der Gleichung $\delta = 0$; nur eine charakteristische Richtung durch P existiert. Wir nennen P einen parabolischen Punkt von 1), und 1) ein parabolisches System in P .

Ist schließlich $p = q = r = 0$ in P , so verschwindet jeder Koeffizient von δ in P , daher ist jede Richtung durch P eine charakteristische Richtung. In diesem Falle heißt P ein singulärer Punkt von 1) und wir nennen 1) ein singuläres System in P .

II. Wir wollen auch die Möglichkeit untersuchen, daß die Unterdeterminanten von δ verschwinden. Wir sehen von vorn herein, daß nicht alle zweireihigen Unterdeterminanten verschwinden, denn wäre dem so, so hätten wir u. a. $dx = 0, dy = 0$, wodurch keine

Richtung bestimmt ist. Setzen wir alle dreireihigen Unterdeterminanten gleich Null, vereinfachen die Resultate und entfernen die überflüssigen Gleichungen, so bleiben folgende übrig:

$$\begin{aligned} b_{11}dx - a_{11}dy &= 0 \\ b_{12}dx - a_{12}dy &= 0 \\ b_{21}dx - a_{21}dy &= 0 \\ b_{22}dx - a_{22}dy &= 0 \\ a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12} &= 0 \\ a_{11}b_{21} - a_{21}b_{11} &= 0. \end{aligned}$$

Die letzten beiden Gleichungen, zusammen mit der Bedingung für die Möglichkeit der ersten vier, besagen, daß jede zweireihige Determinante aus der Matrix

$$5) \quad M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

(die nicht mit der Matrix der Koeffizienten von 1) in ihrer vorkommenden Reihenfolge zu verwechseln ist) verschwinden muß. Einen Punkt P , für welchen alle zweireihigen Determinanten von 5) verschwinden, nennen wir einen ausgezeichneten Punkt von 1), und 1) ein ausgezeichnetes System in P .

Schreiben wir in diesem Falle

$$a_{pq} = \alpha \varrho_{pq}, \quad b_{pq} = \beta \varrho_{pq},$$

so ist

$$-\delta = (\varrho_{11}\varrho_{22} - \varrho_{12}\varrho_{21})(\beta dx - \alpha dy)^2,$$

so daß ein ausgezeichnete Punkt nie elliptisch oder hyperbolisch, sondern nur parabolisch oder singular sein kann.

III. Man sieht sofort, daß die Kriterien in I. und II. invariant bleiben unter den in § 1 besprochenen Transformationen, d. h.:

Die Eigenschaft eines Systems 1), in einem Punkte elliptisch, hyperbolisch, gewöhnlich-parabolisch, ausgezeichnet-parabolisch, gewöhnlich-singular oder ausgezeichnet-singular zu sein, bleibt unverändert unter den betrachteten Transformationen.

Jetzt werden wir ausschließlich Systeme betrachten, die denselben Charakter in jedem Punkte eines ganzen Bereiches besitzen, und wir wollen beweisen, daß es Normalformen für jeden Charakter gibt, so daß jedes System eines Charakters durch Transformationen der drei betrachteten Arten auf die entsprechende Normalform reduziert

werden kann. Wir nennen kurz Transformationen der unabhängigen Variablen, lineare Zusammensetzungen der Gleichungen und lineare Transformationen der unbekanntenen Funktionen der Reihe nach Transformationen 1., 2. und 3. Art.

IV. Nehmen wir zunächst den elliptischen Fall. Es sei also $pr - q^2 > 0$ in jedem Punkt eines Gebietes. Dann hat die Gleichung $\delta = 0$ zwei konjugiert komplexe Wurzeln, und wir haben die Differentialgleichungen

$$\mu dx + \nu dy = 0, \quad \bar{\mu} dx + \bar{\nu} dy = 0.$$

Deren Lösungen sind auch konjugiert komplex; sie mögen etwa

$$\xi(x, y) = \alpha, \quad \bar{\xi}(x, y) = \beta$$

heißen, wo α, β Konstante bedeuten. Schreiben wir

$$X = \xi + \bar{\xi}, \quad Y = i(\xi - \bar{\xi}),$$

so haben wir eine reelle Transformation 1. Art, deren Funktionaldeterminante nicht verschwindet; denn wäre die Funktionaldeterminante gleich Null, so wäre auch

$$4(q^2 - pr) = \left| \begin{array}{cc} \mu & \nu \\ \bar{\mu} & \bar{\nu} \end{array} \right|^2 = 0.$$

Durch diese Transformation erhalten wir eine neue Form für das System 1), deren Koeffizienten wir aber wieder mit denselben Buchstaben bezeichnen, da kein Irrtum dadurch entstehen kann. Durch die Transformation nimmt die Gleichung der Charakteristiken die einfache Form

$$dX^2 + dY^2 = 0$$

an; nach § 1, V ist diese Gleichung wieder die Charakteristikengleichung. In der neuen Form muß diese Gleichung mit

$$p dX^2 + 2q dX dY + r dY^2 = 0$$

übereinstimmen; daraus folgt:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| \neq 0 \\ \left| \begin{array}{cc} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{array} \right| &= 0. \end{aligned}$$

Wegen der ersten dieser Bedingungen ist es möglich, eine solche Transformation 2. Art auszuführen, daß $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ mittels der andern Größen linear ausgedrückt werden;

wir gebrauchen nach der Transformation wieder dieselben Buchstaben wie vorher. Die letztgenannten Bedingungen bleiben erhalten; ferner ist jetzt

$$a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{21} = 0, a_{22} = 1;$$

die Bedingungen nehmen daher die Gestalt an:

$$\begin{aligned} b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} &= 1, \\ b_{22} + b_{11} &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 1) selbst haben also die Form:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \equiv \frac{\partial u}{\partial X} + b_{11} \frac{\partial u}{\partial Y} + b_{12} \frac{\partial v}{\partial Y} = \mathfrak{L}(u, v) \\ \lambda_2 \equiv \frac{\partial v}{\partial X} + b_{21} \frac{\partial u}{\partial Y} - b_{11} \frac{\partial v}{\partial Y} = \mathfrak{L}(u, v) \end{array} \right\}, \quad b_{11}^2 + b_{12}b_{21} + 1 = 0.$$

Es sind sicher $b_{12} \neq 0$, $b_{21} \neq 0$, denn wäre $b_{12} = 0$ oder $b_{21} = 0$, so hätten wir den Widerspruch $b_{11}^2 + 1 = 0$. Wir dürfen also die Transformation 2. Art:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_1 = \lambda_1 \\ \Lambda_2 = -b_{11}\lambda_1 - b_{12}\lambda_2 \end{array} \right.$$

ausführen; dadurch bekommen wir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial X} + b_{11} \frac{\partial u}{\partial Y} + b_{12} \frac{\partial v}{\partial Y} = \mathfrak{L}(u, v) \\ -b_{11} \frac{\partial u}{\partial X} - b_{12} \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y} = \mathfrak{L}(u, v). \end{array} \right.$$

Machen wir schließlich die Transformation 3. Art:

$$\left\{ \begin{array}{l} U = u \\ V = b_{11}u + b_{12}v, \end{array} \right.$$

so gelangen wir zu der Form:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = \mathfrak{L}(u, v) \\ \frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{\partial V}{\partial X} = \mathfrak{L}(u, v). \end{array} \right.$$

Wir können also sagen:

Ein System 1), welches in einem ganzen Gebiet elliptisch ist, läßt sich durch Transformationen der drei genannten Arten auf die Normalform

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \mathfrak{L}(u, v) \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \mathfrak{L}(u, v) \end{cases}$$

bringen.

V. Im hyperbolischen Falle ist $pr - q^2 < 0$ in einem ganzen Gebiet. Die Gleichung $\delta = 0$ hat zwei reelle, verschiedene Wurzeln; die Charakteristiken sind durch Gleichungen

$$\mu dx + \nu dy = 0, \quad \pi dx + \varkappa dy = 0$$

gegeben, deren Lösungen etwa

$$X(x, y) = \alpha, \quad Y(x, y) = \beta$$

sein mögen. Wir wenden die Transformation 1. Art

$$x = X(x, y), \quad y = Y(x, y)$$

an. Dadurch wird die Gleichung der Charakteristiken

$$dX dY = 0,$$

sodaß die Koeffizienten von 1) den Bedingungen genügen müssen:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &\neq 0. \end{aligned}$$

Die letzte Bedingung sagt aus, daß die Summe zweier Determinanten von Null verschieden ist; dann ist wenigstens eine dieser Determinanten von Null verschieden; wir nehmen an, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, daß

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dann läßt sich eine solche Transformation 2. Art angeben, daß das System nach $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ aufgelöst wird; daher nehmen wir sogleich an, daß

$$a_{11} = 1, \quad b_{12} = 0, \quad a_{21} = 0, \quad b_{22} = 1;$$

die andern Bedingungen werden:

$$\begin{aligned} b_{11} &= 0, & a_{22} &= 0, \\ 1 - a_{12}b_{21} &\neq 0, \end{aligned}$$

und die Gleichungen schreiben sich

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial X} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial X} &= \mathfrak{L}(u, v) \\ b_{21} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial Y} &= \mathfrak{L}(u, v) \end{aligned} \right\}, \quad 1 - a_{12}b_{21} \neq 0.$$

Führen wir schließlich die nicht singuläre Transformation 3. Art

$$\begin{cases} U = u + a_{12}v \\ V = b_{21}u + v \end{cases}$$

aus, so nehmen die Gleichungen die Gestalt an:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial X} = \mathfrak{L}(U, V) \\ \frac{\partial V}{\partial Y} = \mathfrak{L}(U, V), \end{cases}$$

also:

Ein System 1), welches in einem ganzen Gebiet hyperbolisch ist, läßt sich durch Transformationen der drei genannten Arten auf die Normalform

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \mathfrak{L}(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \mathfrak{L}(u, v) \end{cases}$$

bringen.

VI. Für den parabolischen Fall ist $pr - q^2 = 0$, eine der Größen $p, q, r \neq 0$. Die Gleichung $\delta = 0$ hat eine (doppelte) reelle Wurzel; die Charakteristiken sind durch eine Gleichung ersten Grades:

$$\mu dx + \nu dy = 0$$

gegeben, die etwa die Lösung

$$X(x, y) = \alpha$$

besitzt. Wir wählen $Y(x, y)$, eine willkürliche, von der Funktion $X(x, y)$ unabhängige Funktion, und machen die Transformation 1. Art:

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y).$$

Die Gleichung der Charakteristiken wird dadurch

$$dX^2 = 0.$$

Es müssen also für die Koeffizienten von 1) die Bedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} &\neq 0. \end{aligned}$$

Durch geeignete Wahl einer Transformation 2. Art können wir nach $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ auflösen, so daß wir schreiben dürfen:

$$b_{11} = 1, \quad b_{12} = 0, \quad b_{21} = 0, \quad b_{22} = 1,$$

wobei die andern Bedingungen folgende Form annehmen:

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= 0, \\ a_{11} + a_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Das System wird dann:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &\equiv \frac{\partial u}{\partial Y} + a_{11} \frac{\partial u}{\partial X} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial X} = \mathfrak{L}(u, v) \\ \lambda_2 &\equiv \frac{\partial v}{\partial Y} + a_{21} \frac{\partial u}{\partial X} - a_{11} \frac{\partial v}{\partial X} = \mathfrak{L}(u, v) \end{aligned} \right\}, \quad a_{11}^2 + a_{12}a_{21} = 0.$$

A) In der Nähe eines gewöhnlich-parabolischen Punktes ist mindestens eine zweireihige Determinante aus der Matrix

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & -a_{11} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

von Null verschieden; d. h. es dürfen nicht gleichzeitig a_{11} , a_{12} , a_{21} verschwinden; oder, mit Rücksicht auf die obige Bedingung, entweder a_{12} oder a_{21} ist von Null verschieden. Enthält das Gebiet keine ausgezeichneten Punkte, und verschwinden daher a_{12} , a_{21} nie gleichzeitig, so ist es möglich, das Gebiet auf solche Weise einzuteilen, daß in jedem Teilgebiet entweder a_{12} oder a_{21} nicht verschwindet¹⁾.

¹⁾ Diese Einteilung des Gebiets ist notwendig. Z. B. hat das System

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} + x(1-x) \frac{\partial u}{\partial x} - (1-x)^2 \frac{\partial v}{\partial x} = \mathfrak{L}(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial y} + x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - x(1-x) \frac{\partial v}{\partial x} = \mathfrak{L}(u, v) \end{cases}$$

Ist $a_{12} \neq 0$ in einem ganzen Gebiet, so führen wir die Transformation 2. Art

$$\begin{cases} A_1 = & \lambda_1 \\ A_2 = a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 \end{cases}$$

aus; wir bekommen:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial Y} + a_{11}\frac{\partial u}{\partial X} + a_{12}\frac{\partial v}{\partial X} = \mathfrak{L}(u, v) \\ a_{11}\frac{\partial u}{\partial Y} + a_{12}\frac{\partial v}{\partial Y} = \mathfrak{L}(u, v); \end{cases}$$

und schließlich liefert die Transformation 3. Art

$$\begin{cases} U = a_{11}u + a_{12}v \\ V = & u \end{cases}$$

die Form

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = \mathfrak{L}(U, V) \\ \frac{\partial U}{\partial Y} & = \mathfrak{L}(U, V). \end{cases}$$

Wäre dagegen $a_{21} \neq 0$ so hätten wir die Transformation 2. Art

$$\begin{cases} A_1 = & \lambda_2 \\ A_2 = a_{21}\lambda_1 - a_{11}\lambda_2 \end{cases}$$

und die Transformation 3. Art

$$\begin{cases} U = a_{21}u - a_{11}v \\ V = & v \end{cases}$$

anwenden können und wären zu derselben Form gekommen.

B) In dem Falle, daß jeder Punkt eines Gebietes ausgezeichnet-parabolisch ist, reduziert sich unser System auf die Form:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial Y} = \mathfrak{L}(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial Y} = \mathfrak{L}(u, v); \end{cases}$$

durch eine Vertauschung der unabhängigen Variablen können wir die Ableitungen nach Y durch Ableitungen nach X ersetzen.

keine ausgezeichneten Punkte, jedoch ist es unmöglich, das System in einem ganzen Gebiet, welches Teile der Geraden $x = 0$, $x = 1$ enthält, durch nicht singuläre Transformationen auf die Normalform zu bringen.

Wir fassen die Resultate so zusammen:

Ein System 1) welches in einem ganzen Gebiet gewöhnlich-parabolisch ist, läßt sich durch Transformationen der drei genannten Arten in jedem einer endlichen Anzahl von Teilgebieten, welche das gegebene Gebiet vollständig überdecken, auf die Normalform

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \mathfrak{L}(u, v) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \mathfrak{L}(u, v) \end{cases}$$

bringen; ein System 1), welches in einem ganzen Gebiet ausgezeichnet-parabolisch ist, läßt sich auf die Normalform

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \mathfrak{L}(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \mathfrak{L}(u, v) \end{cases}$$

bringen.

VII. Für ein singuläres System verschwindet jeder Koeffizient in δ ; jede Richtung $dx : dy$ ist eine charakteristische Richtung. Wir haben also die Bedingungen

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

A) Wir wollen erstens den Fall betrachten, daß jeder Punkt des Gebietes ein ausgezeichneter Punkt ist. Dann können wir nach II schreiben

$$a_{pq} = \alpha \varrho_{pq}, \quad b_{pq} = \beta \varrho_{pq},$$

sodaß unsere Bedingungen sich auf folgende

$$\alpha^2 R = 0, \quad \alpha \beta R = 0, \quad \beta^2 R = 0$$

reduzieren, wo

$$R = \begin{vmatrix} \varrho_{11} & \varrho_{12} \\ \varrho_{21} & \varrho_{22} \end{vmatrix}.$$

Es ist entweder $\alpha = \beta = 0$, oder $R = 0$. Im ersten Falle verschwinden die Koeffizienten in (1). Im zweiten Fall verschwindet jede zweireihige Determinante aus der Matrix der Koeffizienten von (1):

$$M = \left\| \begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} & a_{12} & b_{12} \\ a_{21} & b_{21} & a_{22} & b_{22} \end{vmatrix} \right\|.$$

In beiden Fällen sind die Gleichungen des Systems linear abhängig. Der Vollständigkeit halber wollen wir auch für diesen trivialen Fall eine Normalform angeben. Verschwinden alle Koeffizienten a, b , so ist die Normalform schon erreicht:

$$\begin{cases} 0 = \mathfrak{L}(u, v) \\ 0 = \mathfrak{L}(u, v). \end{cases}$$

Verschwinden nicht alle Koeffizienten, so bekommen wir durch eine Transformation 2. Art die Form

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \mathfrak{L}(u, v) \\ a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_1 \frac{\partial u}{\partial y} + a_2 \frac{\partial v}{\partial x} + b_2 \frac{\partial v}{\partial y} = \mathfrak{L}(u, v) \end{array} \right\}, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$

Es ist alsdann leicht, Transformationen 3. und 1. Art zu finden, die das System in die Form

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \mathfrak{L}(u, v) \\ 0 = \mathfrak{L}(u, v) \end{cases}$$

bringen.

B) Wir betrachten schließlich den Fall, daß jeder Punkt des Gebietes gewöhnlich-singulär ist; es gelten die am Anfange dieses Absatzes aufgestellten Bedingungen. Es sei zunächst ein derartiges Teilgebiet betrachtet (wenn ein solches existiert), daß in jedem seiner Punkte die Ungleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

gilt; dann können wir durch eine Transformation 2. Art erreichen, daß

$$a_{11} = 1, \quad a_{21} = 0, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = 1,$$

wobei die andern Bedingungen dann lauten:

$$a_{22} = 0, \quad b_{11} = 0, \quad 1 - a_{12} b_{21} = 0;$$

die so erhaltenen Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial x} = \mathfrak{L}(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial y} + b_{21} \frac{\partial u}{\partial y} = \mathfrak{L}(u, v) \end{array} \right\}, \quad a_{12} b_{21} = 1,$$

lassen sich sofort durch eine Transformation 3. Art auf die Form

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \mathfrak{L}(u, v) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \mathfrak{L}(u, v) \end{cases}$$

bringen.

Zweitens betrachten wir ein Teilgebiet, wo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} \\ a_{21} & b_{21} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Wir können dann durch eine Transformation 2. Art erreichen, daß

$$a_{11} = 1, \quad a_{21} = 0, \quad b_{11} = 0, \quad b_{21} = 1,$$

daher auch

$$a_{22} = 0, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} - a_{12} = 0;$$

es lauten dann die Gleichungen:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial x} = \mathfrak{L}(u, v) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial y} = \mathfrak{L}(u, v), \end{cases}$$

die sich wieder durch eine Transformation 3. Art auf die oben gegebene Form reduzieren lassen.

Nehmen wir ein beliebig großes Gebiet, in welchem die Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} \\ a_{21} & b_{21} \end{vmatrix}$$

nie gleichzeitig verschwinden, so können wir es in Teilgebiete zerlegen, sodaß in jedem Teilgebiet eine dieser Determinanten überall von Null verschieden ist. Unsere Reduktion ist daher erreicht in dem gewählten Gebiet. Es bleibt übrig, diejenigen Teilbereiche zu untersuchen, welche Punkte enthalten, die beiden Determinanten den Wert Null erteilen. Verschwinden die Determinanten in einem Punkte, so verschwindet dort auch notwendig im vorliegenden Fall

$$\begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

es ist dann sicher in diesem Punkt (und daher in einem kleinen Gebiet um diesen Punkt)

$$\begin{vmatrix} a_{12} & b_{12} \\ a_{22} & b_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

es sei denn, daß die Gleichungen in diesem Punkt linear abhängig sind; diese Möglichkeit lassen wir vorläufig bei Seite. Führen wir eine Transformation 2. Art aus, so daß

$$a_{12} = 1, \quad a_{22} = 0, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = 1$$

wird, dann haben wir weiter die Gleichungen wegen

$$a_{11} = 0, \quad a_{21} = 0, \quad b_{11} = 0, \quad b_{21} = 0$$

in der Form

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = \mathfrak{L}(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \mathfrak{L}(u, v); \end{cases}$$

sie lassen sich durch Vertauschung von u, v in der vorher gegebenen Form schreiben.

In einem Gebiete, wo das System 1) gewöhnlich-singulär und linear abhängig ist, bekommen wir leicht, wie in A), die Form

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \mathfrak{L}(u, v) \\ 0 = \mathfrak{L}(u, v). \end{cases}$$

Das Resultat lautet also:

Ein System 1), welches in einem ganzen Gebiet gewöhnlich-singulär, linear unabhängig ist, läßt sich durch Transformationen der drei genannten Arten in jedem einer endlichen Anzahl von Teilgebieten, welche das gegebene Gebiet vollständig überdecken, auf die Normalform

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \mathfrak{L}(u, v) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \mathfrak{L}(u, v) \end{cases}$$

bringen; ein System 1), welches in einem ganzen Gebiet gewöhnlich-singulär, linear abhängig ist, läßt sich auf die Form

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \mathfrak{L}(u, v) \\ 0 = \mathfrak{L}(u, v) \end{cases}$$

bringen; ein System 1), welches in einem ganzen Gebiet ausgezeichnet-singulär ist, ist notwendig auch linear abhängig, und läßt sich auf eine der Normalformen

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \mathfrak{L}(u, v) \\ 0 = \mathfrak{L}(u, v), \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = \mathfrak{L}(u, v) \\ 0 = \mathfrak{L}(u, v) \end{cases}$$

bringen.

VIII. Zwecks bequemer Übersicht werden die gefundenen Normalformen in eine Tabelle zusammengestellt, [Seite 28](#).

IX. Zum Schluß dieses Paragraphen wollen wir einige Arten von Systemen aussondern, die für die weitem Betrachtungen trivial sind, indem sie sich auf Differentialgleichungen erster Ordnung, Gleichungen, in welchen keine Ableitungen vorkommen, oder gewöhnliche Differentialgleichungen reduzieren lassen¹⁾).

Schreiben wir das allgemeine gewöhnlich-parabolische System:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = A(x, y)u + B(x, y)v \\ \frac{\partial u}{\partial y} = C(x, y)u + D(x, y)v. \end{cases}$$

Ist $D(x, y)$ identisch Null, so läßt sich u aus der zweiten Gleichung bestimmen; dann kann die erste Gleichung nach v aufgelöst werden; die allgemeine Lösung ist also durch Auflösen zweier linearer, gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung zu erhalten. Es genügt daher, diejenigen gewöhnlich-parabolischen Systeme zu betrachten, für welche $D(x, y)$ nicht überall verschwindet; wir können dann ein solches Gebiet wählen, daß $D(x, y)$ nirgends verschwindet.

Das ausgezeichnet-parabolische System lautet:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = A(x, y)u + B(x, y)v \\ \frac{\partial v}{\partial x} = C(x, y)u + D(x, y)v. \end{cases}$$

Es kommen hier keine Ableitungen nach y vor; darum kann das System als gewöhnliches Differentialgleichungssystem gelöst werden, wobei x als die unabhängige Variable, y als Parameter betrachtet sind.

¹⁾ Die Ausführungen dieses Absatzes sind möglichst kurz gemacht; es ist keine Rede davon, strenge Auflösungsverfahren für die betrachteten Systeme anzugeben, da diese außerhalb des Gebiets der vorliegenden Arbeit fallen.

Tabelle der Normalformen.

Charakter des Systems.	Normalform.	Charakteristiken.
1. Elliptisch	$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \mathfrak{L}(u, v) \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \mathfrak{L}(u, v) \end{cases}$	$\begin{cases} x + iy = \alpha \\ x - iy = \beta \end{cases}$
2. Hyperbolisch	$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \mathfrak{L}(u, v) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \mathfrak{L}(u, v) \end{cases}$	$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$
3. Gewöhnlich- parabolisch	$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \mathfrak{L}(u, v) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \mathfrak{L}(u, v) \end{cases}$	$x = \alpha$
4. Ausgezeichnet- parabolisch	$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \mathfrak{L}(u, v) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \mathfrak{L}(u, v) \end{cases}$	$y = \alpha$
5. Gewöhnlich- singulär, linear unabhängig	$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \mathfrak{L}(u, v) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \mathfrak{L}(u, v) \end{cases}$	$—$
6. Gewöhnlich- singulär, linear abhängig	$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \mathfrak{L}(u, v) \\ 0 = \mathfrak{L}(u, v) \end{cases}$	$—$
7. Ausgezeichnet- singulär, linear abhängig	$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \mathfrak{L}(u, v) \\ 0 = \mathfrak{L}(u, v) \end{cases}$	$—$
	$\begin{cases} 0 = \mathfrak{L}(u, v) \\ 0 = \mathfrak{L}(u, v) \end{cases}$	$—$

Das gewöhnlich-singuläre, linear unabhängige System:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = A(x, y)u + B(x, y)v \\ \frac{\partial u}{\partial y} = C(x, y)u + D(x, y)v \end{cases}$$

läßt sich, falls v überhaupt auf den rechten Seiten vorkommt, durch Elimination von v auf eine einzige lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für u reduzieren; nach Integration dieser Gleichung ist v durch eine ableitungsfreie Gleichung gegeben. Ist die Elimination unmöglich, d. h. ist $B(x, y) \equiv D(x, y) \equiv 0$, so haben wir zwei lineare partielle Differentialgleichungen für u , die dann und nur dann lösbar sind, wenn $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial x}$; v bleibt völlig willkürlich.

Bei dem gewöhnlich-singulären, linear abhängigen System

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = A(x, y)u + B(x, y)v \\ 0 = C(x, y)u + D(x, y)v \end{cases}$$

gibt die zweite Gleichung (wenn nicht $C(x, y) \equiv D(x, y) \equiv 0$) eine ableitungsfreie Relation zwischen u, v ; drücken wir eine dieser beiden Funktionen durch die andre aus, so wird die erste Gleichung eine lineare Gleichung erster Ordnung für die andre Funktion. Ist dagegen $C(x, y) \equiv D(x, y) \equiv 0$, so darf eine der Funktionen willkürlich gewählt werden; die andre ist dann durch eine lineare Gleichung erster Ordnung bestimmt.

Für das ausgezeichnet-singuläre System gibt es zwei Formen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = A(x, y)u + B(x, y)v \\ 0 = C(x, y)u + D(x, y)v \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = A(x, y)u + B(x, y)v \\ 0 = C(x, y)u + D(x, y)v \end{array} \right\}.$$

Im ersten Falle ist, wenn $D(x, y)$ nicht identisch Null, v durch u ausdrückbar, und wir erhalten eine lineare Gleichung erster Ordnung für u . Ist $D(x, y) \equiv 0$, so ist die einzige Lösung des Systems $u = 0, v = 0$; es sei denn, daß $B(x, y)$ oder $C(x, y) \equiv 0$; ist $B(x, y) \equiv 0$, so existieren auch die Lösungen $u = 0, v =$ willkürliche Funktion; ist $C(x, y) \equiv 0$, so ist die erste Gleichung bei willkürlicher Wahl von v für u lösbar. Im zweiten Falle kommen gar keine Ableitungen vor; die Gleichungen besitzen dann und nur dann Lösungen, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} A(x, y) & B(x, y) \\ C(x, y) & D(x, y) \end{vmatrix}$$

verschwindet.

X. Nur folgende Formen sind also als Systeme von allgemeinem Charakter zu bezeichnen:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = A(x, y)u + B(x, y)v \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = C(x, y)u + D(x, y)v, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} & = A(x, y)u + B(x, y)v \\ \frac{\partial v}{\partial y} & = C(x, y)u + D(x, y)v \end{cases}$$

$$\left. \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = A(x, y)u + B(x, y)v \\ \frac{\partial u}{\partial y} = C(x, y)u + D(x, y)v \end{cases} \right\}, D(x, y) \neq 0.$$

Diese werden der Reihe nach in den folgenden drei Kapiteln behandelt werden.

Zweites Kapitel.

Das elliptische System.

§ 3. Hilfsmittel zur Theorie des elliptischen Systems.

In diesem Paragraphen soll eine Reihe von vorbereitenden Hilfssätzen betrachtet werden, die zur Lösung der Randwertaufgabe bei dem elliptischen System erforderlich sind. Einige Sätze aus der Potentialtheorie werden ohne Beweise angegeben; bei andern, die neu sind, werden diejenigen Teile der Beweise, welche auf rein potentialtheoretischen Methoden beruhen, ziemlich kurz angedeutet werden¹⁾.

I. Es sei Ω ein geschlossenes, von einer stetig gekrümmten doppelunkontourigen Kurve S begrenztes Gebiet der xy -Ebene. Von einer Funktion $f(xy)$, die im Innern und auf dem Rande von Ω stetig resp. stetig differenzierbar, u. s. w. ist, sagen wir kurz, sie sei stetig resp. stetig differenzierbar u. s. w.; Eigenschaften, die allein im Innern

¹⁾ Für die betreffenden Sätze und Methoden aus der Potentialtheorie sei verwiesen auf Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie, Bd. II; Horn, Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, §§ 50–58. Häufig fehlen in der Literatur strenge Beweise mit genauer Angabe der hinreichenden Bedingungen, doch sind eventuelle Lücken ohne große Schwierigkeit auszufüllen. Alle diese Ausführungen hier anzugeben, würde uns viel zu weit führen.

von Ω stattfinden, werden immer als solche genannt. Der Wert einer Funktion $f(xy)$ in einem Punkte auf S , dessen Bogenlänge, von einem festen Punkt auf S gemessen, gleich s ist, wird immer mit $f(s)$ bezeichnet. Es bedeutet dann auch $\frac{\partial f(s)}{\partial x}$ resp. $\frac{\partial f(s)}{\partial y}$ u. s. w. die Ableitung in der x - resp. y -Richtung u. s. w. im Punkte s auf S . Die Buchstaben n, ν bedeuten immer die Richtungen der inneren Normalen in den Punkten s, σ von S . Bei Funktionen $f(\xi\eta, xy)$ die von zwei Punkten $(\xi\eta), (xy)$ abhängig sind, gebrauchen wir auch, falls ein Punkt oder die beiden Punkte auf S liegen, die leicht verständlichen Bezeichnungen

$$f(\sigma, xy), f(\xi\eta, s), f(\sigma, s), \frac{\partial f(\sigma, xy)}{\partial \xi}, \frac{\partial f(\sigma, s)}{\partial \eta}$$

u. s. w. Folgende Abkürzungen werden vielfach benutzt:

$$r(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2) = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2},$$

$$l(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2) = -\log \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2}.$$

Die Greenschen Funktionen erster und zweiter Art der Laplaceschen Gleichung sind durch die Bedingungen definiert ¹⁾:

$$G(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2) = l(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2) + g(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2);$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \eta_1^2} = 0; \quad G(\sigma_1, \xi_2\eta_2) = 0;$$

$$H(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2) = l(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2) + h(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2);$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta_1^2} = 0; \quad \frac{\partial H(\sigma_1, \xi_2\eta_2)}{\partial \nu_1} = 0; \quad \iint_{\Omega} H(\xi\eta, xy) dR = 0;$$

wo g, h reguläre Funktionen sind. Bekanntlich ist jede der Funktionen G, H symmetrisch in Bezug auf das Punktepaar $(\xi_1\eta_1), (\xi_2\eta_2)$.

IIa. Sind $\varphi(xy), \psi(xy)$ endlich bleibende, im Innern von Ω stetige Funktionen, so konvergieren die Integrale

$$\iint_{\Omega} l(\xi\eta, xy)\varphi(xy) dR, \quad \iint_{\Omega} \frac{\varphi(xy)}{r(\xi\eta, xy)} dR,$$

und stellen stetige Funktionen dar; und folgende Umkehrung der Integrationsfolge ist erlaubt:

$$\iint_{\Omega} \iint_{\Omega} \frac{\varphi(x_1y_1)\psi(xy)}{r(x_1y_1, xy)} dR dR_1 = \iint_{\Omega} \iint_{\Omega} \frac{\varphi(x_1y_1)\psi(xy)}{r(x_1y_1, xy)} dR_1 dR,$$

¹⁾ Hilbert, Göttinger Nachrichten (1904), S. 237–238.

IIb. Ist $\varphi(xy)$ eine endlich bleibende, im Innern von Ω stetige Funktion, so gelten die Differentiationsformeln

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \iint_{\Omega} l(\xi\eta, xy)\varphi(xy) dR = \iint_{\Omega} \frac{\partial l(\xi\eta, xy)}{\partial \xi} \varphi(xy) dR,$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \iint_{\Omega} l(\xi\eta, xy)\varphi(xy) dR = \iint_{\Omega} \frac{\partial l(\xi\eta, xy)}{\partial \eta} \varphi(xy) dR.$$

IIc. Ist $\varphi(xy)$ eine stetige, im Innern von Ω stetig differenzierbare Funktion, so konvergieren die Integrale

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial^2 l(\xi\eta, xy)}{\partial x \partial \xi} \{\varphi(xy) - \varphi(\xi\eta)\} dR, \quad \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 l(\xi\eta, xy)}{\partial x \partial \eta} \{\varphi(xy) - \varphi(\xi\eta)\} dR,$$

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial^2 l(\xi\eta, xy)}{\partial y \partial \xi} \{\varphi(xy) - \varphi(\xi\eta)\} dR, \quad \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 l(\xi\eta, xy)}{\partial y \partial \eta} \{\varphi(xy) - \varphi(\xi\eta)\} dR.$$

IIIa. Ist $\varphi(\xi_1\eta_1, xy, \xi_2\eta_2)$ eine endlich bleibende, bei getrennten Lagen der Punkte $(\xi_1\eta_1)$, (xy) , $(\xi_2\eta_2)$ stetige Funktion, so ist die Funktion

$$\Phi(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2) = \iint_{\Omega} \frac{\varphi(\xi_1\eta_1, xy, \xi_2\eta_2)}{r(\xi_1\eta_1, xy)r(xy, \xi_2\eta_2)} dR$$

eine bei getrennten Lagen der Punkte $(\xi_1\eta_1)$, $(\xi_2\eta_2)$ stetige Funktion; bei Annäherung der Punkte $(\xi_1\eta_1)$, $(\xi_2\eta_2)$ gilt die Ungleichung:

$$|\Phi(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)| < kl(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2),$$

wenn

$$r(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2) < \delta,$$

wo k eine Konstante bedeutet.

Es sei $|\varphi| < m$, wo m eine Konstante bedeutet; wir nehmen zuerst zwei getrennt liegende Punkte $(\xi_1\eta_1)$, $(\xi_2\eta_2)$,

$$\varrho = r(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2) > 0,$$

und wollen beweisen, daß wir zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta > 0$ wählen können, daß

$$|\Phi(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2) - \Phi(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)| < \varepsilon,$$

wenn

$$r(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, \xi_1\eta_1) < \delta, \quad r(\bar{\xi}_2\bar{\eta}_2, \xi_1\eta_1) < \delta.$$

Wir wählen zunächst δ so klein, daß

$$\delta < \frac{\varrho}{2}, \quad \frac{32\pi m\delta}{\varrho - 2\delta} < \varepsilon \quad (1).$$

Wir nennen Ω_1, Ω_2 zwei kleine Kreise vom Radius δ um $(\xi_1\eta_1), (\xi_2\eta_2)$ als Mittelpunkte oder die in Ω liegenden Teile solcher Kreise, Ω_0 den übrigen Teil von Ω , und schreiben

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_0,$$

wo

$$\Phi_i(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2) = \iint_{\Omega_i} \frac{\varphi(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, xy, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2)}{r(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, xy)r(xy, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2)} dR, \quad [i = 0, 1, 2],$$

für beliebige Punkte $(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1)$ in $\Omega_1, (\bar{\xi}_2\bar{\eta}_2)$ in Ω_2 . In Ω_1 ist

$$\begin{aligned} r(xy, \bar{\xi}_1\bar{\eta}_1) &\leq 2\delta, \\ r(xy, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2) &\geq \varrho - 2\delta; \end{aligned}$$

wir finden also mit Hilfe von Polarkoordinaten $r [= r(\xi_1\eta_1, xy)], \vartheta$ um $(\xi_1\eta_1)$:

$$\begin{aligned} |\Phi_1(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2)| &\leq \frac{m}{\varrho - 2\delta} \iint_{\Omega_1} \frac{dR}{r(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, xy)} \\ &\leq \frac{m}{\varrho - 2\delta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\delta} dr d\vartheta = \frac{4\pi m\delta}{\varrho - 2\delta} < \frac{\varepsilon}{8}. \end{aligned}$$

Ebenso ist

$$|\Phi_2(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2)| < \frac{\varepsilon}{8};$$

und diese Ungleichungen gelten auch insbesondere, wenn wir die Punkte $(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1), (\bar{\xi}_2\bar{\eta}_2)$ in den speziellen Lagen $(\xi_1\eta_1), (\xi_2\eta_2)$ wählen. Es ist daher

$$\begin{aligned} |\Phi_1(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2) - \Phi_1(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)| &< \frac{\varepsilon}{4}, \\ |\Phi_2(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2) - \Phi_2(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)| &< \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

¹⁾ Diese Wahl von δ ist sicher möglich; denn es ist

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{32\pi m\delta}{\varrho - 2\delta} = 0.$$

Da aber die Punkte $(\xi_1\eta_1)$, $(\xi_2\eta_2)$ nicht in Ω_0 enthalten sind, so ist sicher Φ_0 stetig; die Wahl eines eventuell kleinern δ läßt also erreichen, daß auch

$$|\Phi_0(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2) - \Phi_0(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

daraus folgt, daß

$$|\Phi(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2) - \Phi(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)| < \varepsilon,$$

womit der erste Teil des Satzes bewiesen ist.

Es sei jetzt M eine Konstante, die größer ist als die Entfernung irgend zweier Punkte von Ω ; dann enthält ein Kreis vom Radius M um irgend einen Punkt von Ω den ganzen Bereich Ω im Innern. Zwecks Beweises der zweiten Behauptung unseres Satzes führen wir wieder Polarkoordinaten ein, und zwar, ausführlich geschrieben, mittels der Formeln:

$$\begin{cases} x = \xi_1 + r \cos \vartheta, & \begin{cases} \xi_2 = \xi_1 + \varrho \cos \alpha, \\ \eta_2 = \eta_1 + \varrho \sin \alpha, \end{cases} \\ y = \eta_1 + r \sin \vartheta, \end{cases}$$

wobei r , ϱ ihre früheren Bedeutungen beibehalten. Wir finden

$$\begin{aligned} |\Phi_1(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)| &\leq m \iint_{\Omega} \frac{dR}{r(\xi_1\eta_1, xy)r(xy, \xi_2\eta_2)} \\ &= m \iint_{\Omega} \frac{dR}{r\sqrt{r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos(\vartheta - \alpha)}} \\ &< m \int_0^{2\pi} \int_0^M \frac{dr d\vartheta}{\sqrt{r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos(\vartheta - \alpha)}} \\ &= m \int_0^{2\pi} \log\{\sqrt{M^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos(\vartheta - \alpha)} + M - \varrho \cos(\vartheta - \alpha)\} d\vartheta \\ &\quad - m \int_0^{2\pi} \log\{\varrho(1 - \cos(\vartheta - \alpha))\} d\vartheta. \end{aligned}$$

Bleiben aber die Punkte $(\xi_1\eta_1)$, $(\xi_2\eta_2)$ im Innern oder auf dem Rande von Ω , so ist der Integrand des ersten Integrals stetig; daher bleibt das Integral für alle Werte von $(\xi_1\eta_1)$, $(\xi_2\eta_2)$ absolut unter einem konstanten Wert k_1 . Ferner ist

$$\int_0^{2\pi} \log\{\varrho(1 - \cos(\vartheta - \alpha))\} d\vartheta = 2\pi \log \varrho - 2\pi \log 2;$$

so daß

$$|\Phi(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)| < -2\pi m \log \varrho + k_2.$$

Wählen wir schließlich ε als eine beliebige positive Konstante, dann δ so klein, daß

$$\frac{k_2}{-\log \varrho} < \varepsilon,$$

wenn

$$\varrho < \delta,$$

so ist

$$|\Phi(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)| < -(2\pi m + \varepsilon) \log \varrho;$$

der zweite Teil des Satzes ist bewiesen; es darf ersichtlich k irgend eine positive Konstante größer als $2\pi m$ sein.

IIIb. Ist $\varphi(\xi_1\eta_1, xy, \xi_2\eta_2)$ eine in Ω endlich bleibende, bei getrennten Lagen der Punkte $(\xi_1\eta_1)$, (xy) , $(\xi_2\eta_2)$ stetige Funktion, so ist folgende Umkehrung der Integrationsfolge erlaubt:

$$\iint_{\Omega} \iint_{\Omega} \frac{\varphi(\xi\eta, xy, x_1y_1)}{r(\xi\eta, xy) r(xy, x_1y_1)} dR dR_1 = \iint_{\Omega} \iint_{\Omega} \frac{\varphi(\xi\eta, xy, x_1y_1)}{r(\xi\eta, xy) r(xy, x_1y_1)} dR_1 dR.$$

Wir erweitern die Definition von φ , indem wir $\varphi = 0$ setzen, wenn entweder (xy) oder (x_1y_1) außerhalb Ω liegt. Wir nennen Ω_0 , Ω_1 , ω kleine Kreise vom Radius δ um die variablen Punkte (xy) , (x_1y_1) , resp. den festen Punkt $(\xi\eta)$, und Ω' ein so großes, Ω ganz im Innern enthaltendes Gebiet, daß die kleinste Entfernung zwischen den Randkurven von Ω , Ω' größer als 2δ ist. Wir werden den Integranden der Integrale zur Abkürzung mit F bezeichnen, und schreiben ferner:

$$r(\xi\eta, xy) = r_0, \quad r(\xi\eta, x_1y_1) = r_1, \quad r(xy, x_1y_1) = r_{01}.$$

Es sei M' die größte Entfernung zweier Punkte von Ω' . In dem vierdimensionalen Bereich, welcher durch die Angaben

$$(xy) \text{ in } \Omega' - \omega; \quad (x_1y_1) \text{ in } \Omega' - \omega; \quad r(xy, x_1y_1) \geq \delta$$

bestimmt ist, ist der Integrand regulär, da jede Singularität ausgeschlossen ist; wir können also erst nach xy , dann nach x_1y_1 integrieren, mit gleichem Resultate; d. h. wie man leicht sieht:

$$\iint_{\Omega' - \omega} \iint_{\Omega' - \Omega_1 - \omega'} F dR dR_1 = \iint_{\Omega' - \omega} \iint_{\Omega' - \Omega_0 - \omega'} F dR_1 dR = I.$$

Gelingt es uns, zu beweisen, daß

$$\begin{aligned} \underline{L}_{\delta=0} I &= \underline{L}_{\delta=0} \iint_{\Omega' - \omega} \iint_{\Omega' - \Omega_1 - \omega} F dR dR_1 = \iint_{\Omega'} \iint_{\Omega'} F dR dR_1 \\ \underline{L}_{\delta=0} I &= \underline{L}_{\delta=0} \iint_{\Omega' - \omega} \iint_{\Omega' - \Omega_0 - \omega} F dR dR_1 = \iint_{\Omega'} \iint_{\Omega'} F dR_1 dR, \end{aligned}$$

so wird damit unser Satz offenbar bestätigt sein. Wir werden hier den Beweis der ersten dieser beiden Grenzformeln durchführen; der Beweis der zweiten würde nicht genau ebenso lauten, sondern noch einfacher sein¹⁾. Wir schreiben

$$I = I' - I'',$$

wo

$$\begin{aligned} I' &= \iint_{\Omega' - \omega} \iint_{\Omega'} F dR dR_1, \\ I'' &= \iint_{\Omega' - \omega} \iint_{\Omega' + \omega} F dR dR_1. \end{aligned}$$

Bleibt (x_1y_1) in $\Omega' - \omega$, (xy) in Ω_1 , so ist $r_1 \geq \delta$, $r_{01} \leq \delta$, $r_0 \geq r_1 - r_{01}$; daher ist

$$\begin{aligned} \left| \iint_{\Omega_1} F dR \right| &\leq m \iint_{\Omega_1} \frac{dR}{r_{01}(r_1 - r_{01})} = m \int_0^{2\pi} \int_0^\delta \frac{dr_{01} d\vartheta}{r_1 - r_{01}} \\ &= 2\pi m \{\log r_1 - \log(r_1 - \delta)\}. \end{aligned}$$

Bleibt (x_1y_1) in $\Omega' - \omega$, (xy) in ω , so ist $r_1 \geq \delta$, $r_0 \leq \delta$, $r_{01} \geq r_1 - r_0$; daher ist

$$\begin{aligned} \left| \iint_{\omega} F dR \right| &\leq m \iint_{\omega} \frac{dR}{r_0(r_1 - r_0)} = m \int_0^{2\pi} \int_0^\delta \frac{dr_0 d\vartheta}{r_1 - r_0} \\ &= 2\pi m \{\log r_1 - \log(r_1 - \delta)\}. \end{aligned}$$

Wir haben also

$$\left| \iint_{\Omega_1 + \omega} F dR \right| \leq 4\pi m \{\log r_1 - \log(r_1 - \delta)\} dR,$$

¹⁾ Hätten wir im Nenner des Integranden auch den Faktor $r(\xi\eta, x_1y_1)$, so wären die Formeln an dieser Stelle von genau symmetrischer Gestalt. Das so entstehende Problem für doppelte Doppelintegrale ist dem für doppelte einfache Integrale ähnlich, das Verfasser im ersten Teil einer andern Arbeit betrachtet hat: *Annals of Mathematics*, Bd. 9 (1908), S. 183–187.

und

$$\begin{aligned}
 |I''| &\leq \iint_{\Omega' - \omega} 4\pi m \{ \log r_1 - \log(r_1 - \delta) \} dR_1, \\
 &\leq 4\pi m \int_0^{2\pi} \int_0^{M'} r_1 \{ \log r_1 - \log(r_1 - \delta) \} dr_1 d\vartheta \quad ^1) \\
 &= 4\pi m \cdot 2\pi \left[\frac{M'^2}{2} \log M' - \frac{M'^2 - \delta^2}{2} \log(M' - \delta) + \frac{\delta M'}{2} - \frac{\delta^2}{2} \log \delta - \frac{\delta^2}{2} \right]
 \end{aligned}$$

und daher

$$\underline{L}_{\delta=0} I'' = 0,$$

mithin

$$\underline{L}_{\delta=0} I = \underline{L}_{\delta=0} I'.$$

Aber

$$\begin{aligned}
 \underline{L}_{\delta=0} I' &= \underline{L}_{\delta=0} \iiint_{\Omega' - \omega} \iiint_{\Omega'} F dR dR_1 \\
 &= \iiint_{\Omega'} \iiint_{\Omega'} F dR dR_1,
 \end{aligned}$$

nach Definition eines uneigentlichen Integrals; so daß die Formel bewiesen ist.

IVa. Bedeutet $\Phi(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)$ irgend einen der Ausdrücke

$$\begin{aligned}
 &\iint_{\Omega} \frac{\partial l(\xi_1\eta_1, xy)}{\partial x} \varphi(xy) \frac{\partial l(xy, \xi_2\eta_2)}{\partial x} dR, \\
 &\iint_{\Omega} \frac{\partial l(\xi_1\eta_1, xy)}{\partial x} \varphi(xy) \frac{\partial l(xy, \xi_2\eta_2)}{\partial y} dR, \\
 &\iint_{\Omega} \frac{\partial l(\xi_1\eta_1, xy)}{\partial y} \varphi(xy) \frac{\partial l(xy, \xi_2\eta_2)}{\partial x} dR, \\
 &\iint_{\Omega} \frac{\partial l(\xi_1\eta_1, xy)}{\partial y} \varphi(xy) \frac{\partial l(xy, \xi_2\eta_2)}{\partial y} dR,
 \end{aligned}$$

wo $\varphi(xy)$ eine stetig differenzierbare Funktion ist, so gelten die Sätze:

¹⁾ Denn jeder Punkt der Randkurve von Ω' ist von $(\xi\eta)$ um höchstens M' entfernt, und der Integrand ist positiv.

1. $\Phi(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)$ ist für getrennt liegende Punkte $(\xi_1\eta_1)$, $(\xi_2\eta_2)$ stetig und nach den Koordinaten eines innern Punktes $(\xi_1\eta_1)$ von Ω stetig differenzierbar.

2. $|\Phi(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)| < kl(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)$,
wenn

$$r(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2) < \delta.$$

3. für einen innern Punkt $(\xi_1\eta_1)$

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} \right| <, \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_1} \right| < \frac{k}{r(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)},$$

wenn

$$r(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2) < \delta.$$

Wir wollen die Behauptungen im ersten der vier genannten Fälle bestätigen; die andern lassen sich genau ebenso behandeln. Schreiben wir

$$\varphi(\xi_1\eta_1, xy, \xi_2\eta_2) = \frac{\xi_1 - x}{r(\xi_1\eta_1, xy)} \varphi(xy) \frac{\xi_2 - x}{r(\xi_2\eta_2, xy)},$$

so ist der Integrand von der in den letzten Absätzen behandelten Art. Also gilt schon nach IIIa die Stetigkeit für getrennte Punkte, sowie die Abschätzung 2. Wir haben also noch zu beweisen, daß, wenn $(\xi_1\eta_1)$ ein innerer Punkt, $(\xi_2\eta_2)$ ein von $(\xi_1\eta_1)$ verschiedener Punkt von Ω ist, die Ableitungen nach $\xi_1\eta_1$ A) existieren; B) stetig sind; C) bei Annäherung der beiden Punkte die Abschätzung 3 befriedigen. Um die Ableitungen nach $\xi_1\eta_1$ gleichzeitig zu behandeln, nennen wir ζ_1 eine beliebige Richtung, die den Winkel α_0 mit der ξ_1 -Richtung bildet.

A) Wir schlagen um den Punkt $(\xi_1\eta_1)$ einen beliebigen, den Punkt $(\xi_2\eta_2)$ umschließenden Teilbereich k von Ω , dessen Randkurve wir C nennen. Es ist dann

$$\begin{aligned} \Phi(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2) &= \iint_k \frac{\partial l(\xi_1\eta_1, xy)}{\partial x} \varphi(xy) \frac{\partial l(xy, \xi_2\eta_2)}{\partial x} dR + \iint_{\Omega-k} \frac{\partial l(\xi_1\eta_1, xy)}{\partial x} \varphi(xy) \frac{\partial l(xy, \xi_2\eta_2)}{\partial x} dR \\ &= \int_C l(\xi_1\eta_1, s) \varphi(s) \frac{\partial l(s, \xi_2\eta_2)}{\partial x} dy \\ &\quad - \iint_k l(\xi_1\eta_1, xy) \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \varphi(xy) \frac{\partial l(xy, \xi_2\eta_2)}{\partial x} \right\} dR \\ &\quad + \iint_{\Omega-k} \frac{\partial l(\xi_1\eta_1, xy)}{\partial x} \varphi(xy) \frac{\partial l(xy, \xi_2\eta_2)}{\partial x} dR, \end{aligned}$$

wie die teilweise Integration ergibt. In dieser Form können wir die Differentiation direkt ausführen¹⁾:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2)}{\partial \zeta_1} &= \int_C \frac{\partial l(\xi_1 \eta_1, s)}{\partial \zeta_1} \varphi(s) \frac{\partial l(s, \xi_2 \eta_2)}{\partial x} dy \\ &\quad - \iint_k \frac{\partial l(\xi_1 \eta_1, xy)}{\partial \zeta_1} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \varphi(xy) \frac{\partial l(xy, \xi_2 \eta_2)}{\partial x} \right\} dR \\ &\quad + \iint_{\Omega-k} \frac{\partial^2 l(\xi_1 \eta_1, xy)}{\partial x \partial \zeta_1} \varphi(xy) \frac{\partial l(xy, \xi_2 \eta_2)}{\partial x} dR. \end{aligned}$$

B) Wir wollen jetzt beweisen, daß wir zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta > 0$ wählen können, daß

$$\left| \frac{\partial \Phi(\bar{\xi}_1 \bar{\eta}_1, \bar{\xi}_2 \bar{\eta}_2)}{\partial \bar{\zeta}_1} - \frac{\partial \Phi(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2)}{\partial \zeta_1} \right| < \varepsilon,$$

wenn

$$r(\bar{\xi}_1 \bar{\eta}_1, \xi_1 \eta_1) < \delta, \quad r(\bar{\xi}_2 \bar{\eta}_2, \xi_2 \eta_2) < \delta.$$

Es sei $|\varphi| < m$, $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| < m$; wir nehmen das in A) willkürliche Gebiet k als einen Kreis vom Radius d um $(\xi_1 \eta_1)$ als Mittelpunkt; und wir wählen zunächst δ so klein, daß²⁾

$$\delta < d, \quad \delta < \frac{\varrho}{2}, \quad 32\pi m \delta \left[\frac{1}{\varrho - 2\delta} + \log(\varrho + 2\delta) \right] < \varepsilon, \quad \frac{32\pi m \delta}{(\varrho - 2\delta)^2} < \varepsilon;$$

Hier ist wieder

$$\varrho = r(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) > 0.$$

Wir schlagen Kreise Ω_1 , Ω_2 vom Radius ϱ um $(\xi_1 \eta_1)$, $(\xi_2 \eta_2)$ als Mittelpunkte; dabei bedeutet Ω_2 eventuell nur den in Ω liegenden Teil eines Kreises; und den außerhalb Ω_1 liegenden Teil von k nennen wir k_1 . Wir schreiben

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\zeta}_1} = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2,$$

¹⁾ Bei Differentiation des Integrals über $\Omega - k$ ist ein Grenzübergang notwendig wegen der singulären Stelle $(\xi_2 \eta_2)$; doch lassen wir die Formeln weg, da keine Schwierigkeit auftritt; bei der Differentiation des Integrals über k machen wir von IIb Gebrauch.

²⁾ Die beiden letzten Ungleichungen lassen sich sicher erfüllen, da deren linke Seiten den Grenzwert 0 bei $\delta = 0$ haben.

wo

$$\begin{aligned}\Psi_0(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2) &= \int_C \frac{\partial l(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, s)}{\partial \bar{\zeta}_1} \varphi(s) \frac{\partial l(s, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2)}{\partial x} dy \\ &\quad - \iint_{k-\Omega_1} \frac{\partial l(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, xy)}{\partial \bar{\zeta}_1} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \varphi(xy) \frac{\partial l(xy, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2)}{\partial x} \right\} dR \\ &\quad + \iint_{\Omega-\Omega_2-k} \frac{\partial^2 l(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, xy)}{\partial x \partial \bar{\zeta}_1} \varphi(xy) \frac{\partial l(xy, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2)}{\partial x} dR, \\ \Psi_1(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2) &= - \iint_{\Omega_1} \frac{\partial l(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, xy)}{\partial \bar{\zeta}_1} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \varphi(xy) \frac{\partial l(xy, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2)}{\partial x} \right\} dR, \\ \Psi_2(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2) &= \iint_{\Omega_2} \frac{\partial^2 l(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, xy)}{\partial x \partial \bar{\zeta}_1} \varphi(xy) \frac{\partial l(xy, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2)}{\partial x} dR;\end{aligned}$$

durch ähnliches Verfahren wie in IVa bekommen wir für die beiden letzten Integrale Abschätzungen, die wir hier nur angeben wollen:

$$\begin{aligned}|\Psi_1(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2)| &\leq 4\pi m\delta \left\{ \frac{1}{\varrho - 2\delta} + \log(\varrho + 2\delta) \right\} < \frac{\varepsilon}{8} \\ |\Psi_2(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2)| &\leq \frac{4\pi m\delta}{(\varrho - 2\delta)^2} < \frac{\varepsilon}{8}\end{aligned}$$

Es gelten daher die Formeln:

$$\begin{aligned}|\Psi_1(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2) - \Psi_1(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)| &< \frac{\varepsilon}{4} \\ |\Psi_2(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2) - \Psi_2(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)| &< \frac{\varepsilon}{4},\end{aligned}$$

wenn

$$r(\xi_1\eta_1, \bar{\xi}_1\bar{\eta}_1) < \delta, \quad r(\xi_2\eta_2, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2) < \delta;$$

da $\Psi_0(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2)$ offenbar stetig ist für die Werte $(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)$, so ist (eventuell bei Wahl eines kleinern δ)

$$|\Psi_0(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2) - \Psi_0(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

also schließlich

$$\left| \frac{\partial \Phi(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2)}{\partial \bar{\zeta}_1} - \frac{\partial \Phi(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)}{\partial \zeta_1} \right| < \varepsilon,$$

was zu beweisen war.

C) Ehe wir das Zusammenfallen der Punkte $(\xi_1\eta_1)$, $(\xi_2\eta_2)$ in Betracht ziehen, wollen wir die Formel für die Ableitung am Ende von A) umformen. Wir nehmen für k einen kleinen Kreis vom Radius δ um $(\xi_1\eta_1)$; die Ableitung selbst ist von dem Wert von δ unabhängig, muß also unverändert bleiben beim Grenzübergang $\delta = 0$. In den ersten zwei Gliedern rechts ist der Grenzwert leicht zu berechnen; denn

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\delta=0} \int_C \frac{\partial l(\xi_1\eta_1, s)}{\partial \zeta_1} \varphi(s) \frac{\partial l(s, \xi_2\eta_2)}{\partial x} dy &= \pi \cos \alpha_0 \cdot \varphi(\xi_1\eta_1) \frac{\partial l(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)}{\partial \xi_1} \\ \mathbf{L}_{\delta=0} \iint_k \frac{\partial l(\xi_1\eta_1, xy)}{\partial \zeta_1} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \varphi(xy) \frac{\partial l(xy, \xi_2\eta_2)}{\partial x} \right\} dR &= 0. \end{aligned}$$

Daher muß das Integral über $\Omega - k$ auch einen Grenzwert besitzen¹⁾. Es ist also

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_1} &= \pi \cos \alpha_0 \cdot \varphi(\xi_1\eta_1) \frac{\partial l(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)}{\partial \xi_1} \\ &+ \mathbf{L}_{\delta=0} \iint_{\Omega-k} \frac{\partial^2 l(\xi_1\eta_1, xy)}{\partial x \partial \zeta_1} \varphi(xy) \frac{\partial l(xy, \xi_2\eta_2)}{\partial x} dR \\ &= \pi \cos \alpha_0 \cdot \varphi(\xi_1\eta_1) \frac{\partial l(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)}{\partial \xi_1} \\ &+ \varphi(\xi_1\eta_1) \mathbf{L}_{\delta=0} \iint_{\Omega-k} \frac{\partial^2 l(\xi_1\eta_1, xy)}{\partial x \partial \zeta_1} \frac{\partial l(xy, \xi_2\eta_2)}{\partial x} dR \\ &+ \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 l(\xi_1\eta_1, xy)}{\partial x \partial \zeta_1} \{ \varphi(xy) - \varphi(\xi_1\eta_1) \} \frac{\partial l(xy, \xi_2\eta_2)}{\partial x} dR, \end{aligned}$$

da letzteres Integral offenbar konvergiert (IIc). Es ist ferner, wenn wir annehmen, φ und seine ersten Ableitungen seien absolut kleiner als m ,

$$\left| \pi \cos \alpha_0 \cdot \varphi(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2) \frac{\partial l(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)}{\partial \xi_1} \right| < \frac{\pi m}{r(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)}$$

$$\begin{aligned} \left| \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 l(\xi_1\eta_1, xy)}{\partial x \partial \zeta_1} \{ \varphi(xy) - \varphi(\xi_1\eta_1) \} \frac{\partial l(xy, \xi_2\eta_2)}{\partial x} \right| \\ \leq m \iint_{\Omega} \frac{dR}{r(\xi_1\eta_1, xy)r(xy, \xi_2\eta_2)} < k_0 l(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2), \end{aligned}$$

¹⁾ Ein solcher Grenzwert bei kreisförmigem Grenzübergang im Fall eines nicht konvergenten Doppelintegrals dürfte wohl, nach Analogie der einfachen Integrale, der Cauchysche Hauptwert des nicht konvergenten Integrals genannt werden.

wenn

$$r(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2) < \delta,$$

nach IIIa. Da diese beiden Bestandteile von $\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta_1}$ singularär sind wie $\frac{1}{r(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)}$ resp. $l(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)$ (welches von noch niederer Ordnung ist), so brauchen wir bloß zu beweisen, daß die Funktion

$$I = \underset{\delta=0}{L} \iint_{\Omega-k} \frac{\partial^2 l(\xi_1\eta_1, xy)}{\partial x \partial \zeta_1} \frac{\partial l(xy, \xi_2\eta_2)}{\partial x}$$

nur von der ersten Ordnung singularär ist, bei Annäherung der Punkte $(\xi_1\eta_1)$, $(\xi_2\eta_2)$. Wir dürfen annehmen, das Gebiet Ω sei konvex, denn sonst könnten wir immer ein konvexes Gebiet innerhalb Ω nehmen, welches die nahe liegenden Punkte $(\xi_1\eta_1)$, $(\xi_2\eta_2)$ enthält, und es würde dann das Integral über den übrigen Teil von Ω stetig sein, also endlich bleiben bei Annäherung der beiden Punkte¹⁾.

Wir bezeichnen mit M_1 resp. M_2 den absolut größten Wert des Logarithmus der Entfernung zwischen dem Punkte $(\xi_1\eta_1)$ resp. $(\xi_2\eta_2)$ und einem Punkte der Randkurve S von Ω . Wir führen Polarkoordinaten um den Punkt $(\xi_1\eta_1)$ ein, mit der in IIIa gegebenen Bezeichnungsweise. Dann ergibt eine leichte Rechnung für den Integranden folgende Identität:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l(\xi_1\eta_1, xy)}{\partial x \partial \zeta_1} \frac{\partial l(xy, \xi_2\eta_2)}{\partial x} &= \frac{\cos(2\vartheta - \alpha_0)}{r^2} \frac{r \cos \vartheta - \varrho \cos \alpha}{r^2 - 2r\varrho \cos(\vartheta - \alpha) + \varrho^2} \\ &= -\frac{\cos(2\vartheta - \alpha_0) \cos \alpha}{\varrho r^2} + \frac{\cos(2\vartheta - \alpha_0) \cos \alpha \{r - \varrho \cos(\vartheta - \alpha)\}}{\varrho r \{r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos(\vartheta - \alpha)\}} \\ &\quad - \frac{\cos(2\vartheta - \alpha_0) \sin(\vartheta - \alpha) \cos \vartheta}{r \{r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos(\vartheta - \alpha)\}}. \end{aligned}$$

Wir nennen die drei Glieder der Reihe nach F_1 , F_2 , F_3 und die entsprechenden Teile des Integrals I_1 , I_2 , I_3 . Wir bemerken, daß nur F_1 bei $r = 0$ von höherer als erster Ordnung singularär ist; darum dürfen wir für I_2 und I_3 das Zeichen

$$\iint_{\Omega} \quad \text{statt} \quad \underset{\delta=0}{L} \iint_{\Omega-k}$$

¹⁾ Uebrigens ist die Einschränkung auf konvexe Gebiete überflüssig, wenn wir die später auftretenden Integrale mit Element $d\vartheta$ als Kurvenintegrale verstehen wollen (vgl. Goursat, Cours d'Analyse, Bd. I, No. 395). Dann wäre aber notwendig (etwa im Fall einer Randkurve mit unendlich oft oszillierender Tangente) eine strengere Untersuchung der unten ausgeführten Integration nach r , mittels welcher ein Doppelintegral in ein Kurvenintegral mit Element $d\vartheta$ übergeführt ist; daher scheint sich die angegebene Methode mehr zu empfehlen.

schreiben. Ferner denken wir uns die Gleichung der Randkurve in der Form $r = r(\vartheta)$ geschrieben. Zunächst ist

$$I_1 = \int_{\delta=0} \iint_{\Omega-k} F_1 r \, dr \, d\vartheta = \int_{\delta=0} \left\{ -\frac{\cos \alpha}{\varrho} \int_0^{2\pi} \cos(2\vartheta - \alpha_0) \{ \log r(\vartheta) - \log \delta \} \right\} d\vartheta;$$

aber

$$\int_0^{2\pi} \cos(2\vartheta - \alpha_0) \log \delta \, d\vartheta = 0;$$

also ist

$$I_1 = -\frac{\cos \alpha}{\varrho} \int_0^{2\pi} \cos(2\vartheta - \alpha_0) \log r(\vartheta) \, d\vartheta,$$

$$|I_1| \leq \frac{1}{\varrho} 2\pi M_1.$$

Es ist

$$I_2 = \iint_{\Omega} F_2 r \, dr \, d\vartheta$$

$$= \frac{\cos \alpha}{\varrho} \int_0^{2\pi} \int_0^{r(\vartheta)} \frac{\cos(2\vartheta - \alpha_0) \{ r - \varrho \cos(\vartheta - \alpha) \}}{r^2 - 2r\varrho \cos(\vartheta - \alpha) + \varrho^2} \, dr \, d\vartheta$$

$$= \frac{\cos \alpha}{\varrho} \int_0^{2\pi} \cos(2\vartheta - \alpha_0) \log \sqrt{\{r(\vartheta)\}^2 - 2\varrho r(\vartheta) \cos(\vartheta - \alpha) + \varrho^2} \, d\vartheta,$$

$$|I_2| \leq \frac{1}{\varrho} 2\pi M_2.$$

Schließlich ist

$$I_3 = \iint_{\Omega} F_3 r \, dr \, d\vartheta$$

$$= - \int_0^{2\pi} \int_0^{r(\vartheta)} \frac{\cos(2\vartheta - \alpha_0) \cos \vartheta \sin(\vartheta - \alpha)}{r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos(\vartheta - \alpha)} \, dr \, d\vartheta$$

$$= -\frac{1}{\varrho} \int_0^{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{r - \varrho \cos(\vartheta - \alpha)}{\varrho \sin(\vartheta - \alpha)} \right]_0^{r(\vartheta)} \cos(2\vartheta - \alpha_0) \cos \vartheta \, d\vartheta;$$

die Wahl des Zweiges des Arcustangens ist unwesentlich; jedenfalls wird das Argument des Arcustangens zwischen $r = 0$ und $r = r(\vartheta)$ nicht unendlich¹⁾; also ist

$$\left| \left[\operatorname{arctg} \frac{r - \varrho \cos(\vartheta - \alpha)}{\varrho \sin(\vartheta - \alpha)} \right]_0^{r(\vartheta)} \right| < \pi;$$

demnach

$$|I_3| < \frac{2\pi^2}{\varrho}.$$

Wir haben also

$$|I| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3| < \frac{2\pi(M_1 + M_2 + \pi)}{\varrho},$$

was bewiesen werden sollte.

IVb. Hat $\Phi(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)$ dieselbe Bedeutung wie in IVa und ist $\varphi(xy)$ eine stetige Funktion, so ist die Funktion

$$u(\xi\eta) = \iint_{\Omega} \Phi(\xi\eta, xy)\varphi(xy) dR$$

stetig, im Innern von Ω stetig differenzierbar.

Abschätzungen für die Differenz zweier Werte von u , den Differenzenquotienten, und die Differenz der Werte einer Ableitung von u folgen leicht auf übliche Weise aus den in IIIa angegebenen Abschätzungen für $\Phi(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)$. Wir lassen die keineswegs schwierigen Rechnungen weg.

Va. Ist $f(s)$ eine stetig differenzierbare Funktion, so existiert eine und nur eine solche stetige im Innern von Ω analytische Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0,$$

daß $u(\sigma) = f(\sigma)$; diese lautet:

$$u(\xi\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial G(\xi\eta, s)}{\partial n} f(s) ds.$$

Vb. Ist $\varphi(xy)$ eine stetige, im Innern von Ω stetig differenzierbare Funktion, so existiert eine und nur eine solche stetig

¹⁾ Wir lassen außer Betracht die Werte $\vartheta = \alpha$, $\vartheta = \alpha + \pi$, für welche die obige Integration nach r von vorn herein nicht gilt; es ist daselbst der Wert von F_3 gleich Null.

differenzierbare, im Innern von Ω zweimal stetig differenzierbare Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \varphi(\xi\eta),$$

daß $u(\sigma) = 0$: diese lautet:

$$u(\xi\eta) = -\frac{1}{2\pi} \iiint_{\Omega} G(\xi\eta, xy) \varphi(xy) dR;$$

und alle Lösungen, für welche $\frac{\partial u(\sigma)}{\partial \nu} = 0$, sind

$$u(\xi\eta) = -\frac{1}{2\pi} \iiint_{\Omega} H(\xi\eta, xy) \varphi(xy) dR + k,$$

wo k eine Konstante.

VI. Für die Greenschen Funktionen G , H bestehen für Punkte $(\xi\eta)$, (xy) von Ω , die nicht beide am Rande, folgende Relationen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial \eta} = 0, \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial \xi} - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \eta} = 0, \\ \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial \eta} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \xi} = 0. \end{array} \right.$$

Nehmen wir irgend eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi(xy)$, die nebst ihren ersten Ableitungen auf S verschwindet. Eine auf C verschwindende Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -2\pi \frac{\partial \varphi(\xi\eta)}{\partial \xi}$$

ist, nach Vb,

$$u(\xi\eta) = \iint_{\Omega} G(\xi\eta, xy) \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial x} dR.$$

Es ist alsdann das Integral

$$\int \left(\frac{\partial u(xy)}{\partial y} dx - \left\{ \frac{\partial u(xy)}{\partial x} + 2\pi \varphi(xy) \right\} dy \right)$$

vom Wege unabhängig; definieren wir

$$v(\xi\eta) = \int_{(ab)}^{(\xi\eta)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \partial x - \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + 2\pi\varphi \right\} dy \right),$$

so ist

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = -2\pi\varphi(\xi\eta) \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0; \end{cases}$$

daher

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = -2\pi \frac{\partial \varphi(\xi\eta)}{\partial \eta}.$$

Ferner ist $\frac{\partial v(s)}{\partial n} = 0$, denn es ist

$$\frac{\partial v(s)}{\partial n} = \frac{\partial v(s)}{\partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial v(s)}{\partial x} \frac{dy}{ds} = -\frac{d}{ds} u(s) - 2\pi \frac{dx}{ds} \varphi(s) = 0.$$

Also muß (nach Vb) v in der Form darstellbar sein:

$$v(\xi\eta) = \iint_{\Omega} H(\xi\eta, xy) \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial y} dR + k.$$

Es müssen daher die Gleichungen gelten:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} \iint_{\Omega} G(\xi\eta, xy) \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial x} dR + \frac{\partial}{\partial \eta} \iint_{\Omega} H(\xi\eta, xy) \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial y} dR = -2\pi\varphi(\xi\eta) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \iint_{\Omega} G(\xi\eta, xy) \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial x} dR - \frac{\partial}{\partial \xi} \iint_{\Omega} H(\xi\eta, xy) \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial y} dR = 0. \end{cases}$$

Durch bekannte Rechnungsmethoden der Potentialtheorie ergeben sich aber die Formeln:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} \iint_{\Omega} l(\xi\eta, xy) \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial x} dR + \frac{\partial}{\partial \eta} \iint_{\Omega} l(\xi\eta, xy) \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial y} dR = -2\pi\varphi(\xi\eta) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \iint_{\Omega} l(\xi\eta, xy) \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial x} dR - \frac{\partial}{\partial \xi} \iint_{\Omega} l(\xi\eta, xy) \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial y} dR = 0. \end{cases}$$

Also müssen die stetigen Teile der Greenschen Funktionen die Gleichungen erfüllen:

$$\begin{cases} \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial g(\xi\eta, xy)}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial x} + \frac{\partial h(\xi\eta, xy)}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial y} \right\} dR = 0 \\ \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial g(\xi\eta, xy)}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial x} - \frac{\partial g(\xi\eta, xy)}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial y} \right\} dR = 0, \end{cases}$$

oder, durch teilweise Integration,

$$\begin{cases} \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial^2 g(\xi\eta, xy)}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 h(\xi\eta, xy)}{\partial y \partial \eta} \right\} \varphi(xy) dR = 0, \\ \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial^2 g(\xi\eta, xy)}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial^2 h(\xi\eta, xy)}{\partial y \partial \xi} \right\} \varphi(xy) dR = 0. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen gelten für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $\varphi(xy)$, welche nebst ihren ersten Ableitungen auf S verschwindet, und für jeden innern Punkt $(\xi\eta)$. Wenn für den Punkt $(\xi\eta)$ und irgend einen Punkt $(\xi_1\eta_1)$ im Innern oder auf dem Rande von Ω , mit $(\xi\eta)$ zusammenfallend oder von $(\xi\eta)$ getrennt, einer der Integranden nicht verschwindet, etwa positiv ist, so ist er in einer kleinen Nachbarschaft von $(\xi_1\eta_1)$ auch positiv. Dann können wir nach dem Vorgange der Variationsrechnung eine die obigen Bedingungen erfüllende Funktion $\varphi(xy)$ wählen, die in dieser Nachbarschaft von $(\xi_1\eta_1)$ positiv ist, sonst überall Null; dann wäre aber der Wert des Integrals sicher positiv, also nicht Null, so daß ein Widerspruch vorliegen würde. Darum gelten notwendig die Gleichungen:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 g(\xi\eta, xy)}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 h(\xi\eta, xy)}{\partial y \partial \eta} = 0 \\ \frac{\partial^2 g(\xi\eta, xy)}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial^2 h(\xi\eta, xy)}{\partial y \partial \xi} = 0 \end{cases}$$

für jeden innern Punkt $(\xi\eta)$ und jeden innern oder Randpunkt (xy) ; daher auch (wegen der Symmetrie der Greenschen Funktionen) für zwei Punkte überhaupt, von denen wenigstens einer im Innern liegt. Da es von vornherein klar ist, daß

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 l(\xi\eta, \xi_1\eta_1)}{\partial \xi_1 \partial \xi} + \frac{\partial^2 l(\xi\eta, \xi_1\eta_1)}{\partial \eta_1 \partial \eta} = 0 \\ \frac{\partial^2 l(\xi\eta, \xi_1\eta_1)}{\partial \xi_1 \partial \eta} - \frac{\partial^2 l(\xi\eta, \xi_1\eta_1)}{\partial \eta_1 \partial \xi} = 0, \end{cases}$$

so folgen durch Addition unsere ersten beiden Behauptungen. Die andern lassen sich ebenso beweisen.

VII. Sind $u(xy)$, $v(xy)$ stetige, im Innern von Ω stetig differenzierbare Funktionen, die den Gleichungen

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = P(xy) \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = Q(xy) \end{cases}$$

genügen, wobei $P(xy)$, $Q(xy)$ auch bei Annäherung an Punkte von S stetig bleiben, so gelten die Formeln:

$$\begin{aligned} u(\xi\eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\partial G(\xi\eta, s)}{\partial n} u(s) ds + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial G(\xi\eta, xy)}{\partial x} P(xy) + \frac{\partial G(\xi\eta, xy)}{\partial y} Q(xy) \right\} dR, \\ v(\xi\eta) &= -\frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\partial H(\xi\eta, s)}{\partial s} u(s) ds + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial H(\xi\eta, xy)}{\partial x} P(xy) - \frac{\partial G(\xi\eta, xy)}{\partial y} Q(xy) \right\} dR. \end{aligned}$$

Zum Beweise bemerken wir zunächst, daß

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} P + \frac{\partial G}{\partial y} Q &= \frac{\partial G}{\partial x} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right\} + \frac{\partial G}{\partial y} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right\} + \\ &+ \left\{ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right\} u + \left\{ \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \right\} v \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial G}{\partial x} u - \frac{\partial G}{\partial y} v \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial G}{\partial y} u + \frac{\partial G}{\partial x} v \right\}. \end{aligned}$$

Wir beschreiben um den Punkt $(\xi\eta)$ als Mittelpunkt einen kleinen Kreis vom Radius δ , und nennen C seine Begrenzung, Ω_δ das zwischen S und C gelegene Gebiet. Wir erhalten durch eine bekannte Umformung mittels des Greenschen Satzes:

$$\iint_{\Omega_\delta} \left\{ \frac{\partial G}{\partial x} P + \frac{\partial G}{\partial y} Q \right\} dR = - \int_S \left\{ \frac{\partial G}{\partial n} u + \frac{\partial G}{\partial s} v \right\} ds - \int_C \left\{ \frac{\partial G}{\partial n} u + \frac{\partial G}{\partial s} v \right\} ds.$$

Auf S verschwindet $\frac{\partial G}{\partial s}$, so daß nur ein Glied in dem Integral über S stehen bleibt. Die Formel gilt für jeden kleinen Wert von δ ; bei Aenderung von δ bleibt das Integral über S ungeändert; ferner ist, wie man leicht zeigt:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\delta=0} \int_C \frac{\partial G}{\partial n} u(s) ds &= -2\pi u(\xi\eta), \\ \mathbf{L}_{\delta=0} \int_C \frac{\partial G}{\partial s} u(s) ds &= 0; \end{aligned}$$

schließlich geht das Integral über Ω_δ beim Grenzübergang $\delta = 0$ über in das Integral über Ω , da letzteres Integral konvergiert. Nach diesen Ueberlegungen erhalten wir das Resultat:

$$\iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial G}{\partial x} P + \frac{\partial G}{\partial y} Q \right\} dR = - \int_C \frac{\partial G}{\partial n} u ds + 2\pi u(\xi\eta),$$

was zu beweisen war. Die zweite Formel wird ebenso bestätigt.

VIIIa. Ist $f(s)$ eine stetige Funktion, so sind die Funktionen

$$\begin{cases} u(\xi\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial G(\xi\eta, s)}{\partial n} f(s) ds \\ v(\xi\eta) = -\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial H(\xi\eta, s)}{\partial s} f(s) ds \end{cases}$$

im Innern von Ω analytisch und erfüllen die Gleichungen:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0. \end{cases}$$

Ist $f(s)$ stetig differenzierbar, so sind $u(\xi\eta)$, $v(\xi\eta)$ im geschlossenen Bereich Ω stetig; ist $f(s)$ zweimal stetig differenzierbar, so sind u , v einmal stetig differenzierbar; außerdem ist $u(\sigma) = f(\sigma)$.

Die drei letzten Behauptungen, sowie die Analytizität und die Randbedingung sind aus der Potentialtheorie bekannt¹⁾; auch die Differentialgleichungen würden durch leichte Ueberlegungen aus potentialtheoretischen Sätzen folgen, unter der Annahme, $f(s)$ wäre stetig differenzierbar. Wenn wir bloß die Stetigkeit von $f(s)$ voraussetzen wollen, so bemerken wir, daß gemäß VI die Differentialgleichungen unmittelbar erfüllt sind; z. B. ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} &= \frac{1}{2\pi} \int_S \left\{ \frac{\partial^2 G(\xi\eta, s)}{\partial n \partial \xi} - \frac{\partial^2 H(\xi\eta, s)}{\partial s \partial \eta} \right\} f(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_S \left\{ \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial \xi} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \xi} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \eta} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial \eta} \frac{dy}{ds} \right\} f(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial \xi} - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \eta} \right) \frac{dx}{ds} f(s) - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial \eta} \right) \frac{dy}{ds} f(s) \right\} ds \\ &= 0, \end{aligned}$$

¹⁾ Uebrigens sind die angegebenen Bedingungen viel weiter als für das Integral u notwendig ist; da wir u , v immer symmetrisch werden behandeln müssen, so hat es keinen Zweck, Bedingungen anzugeben, die nicht auch für v genügend sind.

und ebenso für die zweite Gleichung.

VIIIb. 1) Sind $P(xy)$ $Q(xy)$ stetige, im Innern von Ω stetig differenzierbare Funktionen, so sind die Funktionen

$$\begin{cases} u(\xi\eta) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial G(\xi\eta, xy)}{\partial x} P(xy) + \frac{\partial G(\xi\eta, xy)}{\partial y} Q(xy) \right\} dR \\ v(\xi\eta) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial H(\xi\eta, xy)}{\partial y} P(xy) - \frac{\partial H(\xi\eta, xy)}{\partial x} Q(xy) \right\} dR \end{cases}$$

stetig, im Innern von Ω stetig differenzierbar und erfüllen die Gleichungen:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = P(\xi\eta) \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \xi} = Q(\xi\eta); \end{cases}$$

außerdem ist

$$u(\sigma) = 0, \quad \iint_{\Omega} v(xy) dR = 0.$$

Die Stetigkeit von u , v folgt sofort aus IIa, da die von den regulären Teilen g , h von G , H herrührenden Bestandteile der Integrale keine Schwierigkeit verursachen. Um uns über die Ableitungen Auskunft zu schaffen, wenden wir teilweise Integration an:

$$\begin{aligned} u(\xi\eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_S G(P dy - Q dx) - \iint_{\Omega} G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dR \\ v(\xi\eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_S H(P dx + Q dy) - \iint_{\Omega} H \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dR. \end{aligned}$$

Die Integrale über S dürfen selbstverständlich unter dem Integralzeichen differenziert werden; dasselbe gilt nach IIb von dem Doppelintegral. Es existieren also die Ableitungen, sie sind nach IIa stetig. Um die Differentialgleichungen zu bestätigen, wollen wir die Ableitungen auf andere Weise ausdrücken. Nehmen wir einen kleinen Kreis Ω_0 vom Radius δ um $(\xi\eta)$ als Mittelpunkt und nennen seinen Rand S_0 . Schreiben wir

$$u = u_0 + \bar{u}_0 + u_1, \quad v = v_0 + \bar{v}_0 + v_1$$

$$u_0(\xi\eta) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega_0} \left\{ \frac{\partial l}{\partial x} P + \frac{\partial l}{\partial y} Q \right\} dR$$

1) Ohne die Formeln VI wäre VIII auch direkt aus der Potentialtheorie beweisbar; doch nur unter mehr Bedingungen für P , Q . In Bezug auf strenge Durchführung der Einzelheiten würde diese Einschränkung für die Anwendung (§ 4, I) erhebliche Schwierigkeiten mit sich ziehen.

$$\bar{u}_0(\xi\eta) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega_0} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x} P + \frac{\partial h}{\partial y} Q \right\} dR$$

$$u_1(\xi\eta) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega - \Omega_0} \left\{ \frac{\partial G}{\partial x} P + \frac{\partial H}{\partial y} Q \right\} dR$$

$$v_0(\xi\eta) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega_0} \left\{ \frac{\partial l}{\partial y} P - \frac{\partial l}{\partial x} Q \right\} dR$$

$$\bar{v}_0(\xi\eta) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega_0} \left\{ \frac{\partial h}{\partial y} P - \frac{\partial g}{\partial x} Q \right\} dR$$

$$v_1(\xi\eta) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega - \Omega_0} \left\{ \frac{\partial H}{\partial y} P - \frac{\partial G}{\partial x} Q \right\} dR,$$

so können wir $\bar{u}_0, u_1, \bar{v}_0, v_1$ durch Differentiation unter dem Integralzeichen differenzieren, und erhalten sogleich nach VI

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \eta} = 0, & \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} = 0 \\ \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \xi} = 0, & \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \frac{\partial v_1}{\partial \xi} = 0. \end{cases}$$

Wir müssen also die für u, v angegebenen Differentialgleichungen für u_0, v_0 bestätigen. Wir finden nach teilweiser Integration und Differentiation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + \frac{\partial v_0}{\partial \eta} &= \frac{1}{2\pi} \int_{S_0} \left\{ P \left(\frac{\partial l}{\partial \xi} dy - \frac{\partial l}{\partial \eta} dx \right) - Q \left(\frac{\partial l}{\partial \xi} dx + \frac{\partial l}{\partial \eta} dy \right) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega_0} \left\{ \frac{\partial l}{\partial \xi} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + \frac{\partial l}{\partial \eta} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \right\} dR \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{S_0} \left\{ P \frac{\partial l}{\partial n} - Q \frac{\partial l}{\partial s} \right\} ds - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega_0} \left\{ \frac{\partial l}{\partial \xi} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + \frac{\partial l}{\partial \eta} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \right\} dR; \end{aligned}$$

n bedeutet die nach dem Kreisinnern gerichtete Normale. Es ist

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\delta=0} \int_{S_0} P \frac{\partial l}{\partial n} ds &= 2\pi P(\xi\eta), & \mathbf{L}_{\delta=0} \int_{S_0} Q \frac{\partial l}{\partial s} ds &= 0, \\ \mathbf{L}_{\delta=0} \iint_{\Omega_0} \left\{ \frac{\partial l}{\partial \xi} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + \frac{\partial l}{\partial \eta} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \right\} dR &= 0, \end{aligned}$$

womit die erste Formel bewiesen ist. Die zweite folgt ebenso aus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial \eta} - \frac{\partial v_0}{\partial \xi} &= \frac{1}{2\pi} \int_{S_0} \left\{ P \left(\frac{\partial l}{\partial \xi} dx + \frac{\partial l}{\partial \eta} dy \right) + Q \left(\frac{\partial l}{\partial \xi} dy - \frac{\partial l}{\partial \eta} dx \right) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega_0} \left\{ \frac{\partial l}{\partial \xi} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) - \frac{\partial l}{\partial \eta} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right\} dR \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{S_0} \left\{ P \frac{\partial l}{\partial s} + Q \frac{\partial l}{\partial n} \right\} ds - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega_0} \left\{ \frac{\partial l}{\partial \xi} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) - \frac{\partial l}{\partial \eta} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right\} dR. \end{aligned}$$

Die letzten Behauptungen unseres Satzes folgen aus den Tatsachen, daß die Integrale u , v auch am Rande stetig sind, und daß Integration nach $\xi\eta$ unter dem Integralzeichen erlaubt ist (IIa); denn aus den Eigenschaften

$$G(\sigma, xy) = 0; \quad \iint_{\Omega} H(xy, x_1 y_1) dR = 0$$

folgen

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(\sigma, xy)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial G(\sigma, xy)}{\partial y} = 0; \\ \iint_{\Omega} \frac{\partial H(xy, x_1 y_1)}{\partial x} dR_1 = 0, \quad \iint_{\Omega} \frac{\partial H(xy, x_1 y_1)}{\partial y} dR_1 = 0. \end{aligned}$$

§ 4. Lösung der Randwertaufgabe für das elliptische System.

In diesem Paragraphen soll die Aufgabe gelöst werden, ein Funktionenpaar zu finden, welches einem elliptischen System von Gleichungen in der Normalform genügt, und außerdem eine lineare Randbedingung erfüllt. Zunächst betrachten wir eine spezielle solche Randbedingung, auf welche sich die allgemeine reduzieren läßt¹⁾.

I. Es sei Ω , wie vorhin, ein geschlossenes, von einer stetig gekrümmten doppel­punktlosen Kurve S begrenztes Gebiet in der xy -Ebene. Wir suchen ein Funktionenpaar $u(xy)$, $v(xy)$, welches dem Differentialgleichungssystem

$$1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = A(xy) u + B(xy) v \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = C(xy) u + D(xy) v \end{cases}$$

¹⁾ Die Anregung zu der hier gelösten Aufgabe, die den Ausgangspunkt für die ganze Arbeit bildete, ist von Herrn Hilbert gegeben worden; die Aufgabe wird auch in seiner 6. Mitteilung über Integralgleichungen, XVII, behandelt, Göttinger Nachrichten (1910).

genügt und die Randbedingung

$$2) \quad u(s) = f(s)$$

erfüllt. Dabei sollen $A(xy)$, $B(xy)$, $C(xy)$, $D(xy)$ stetig differenzierbare Funktionen ¹⁾ von x , y sein; $f(s)$ soll eine zweimal stetig differenzierbare Funktion der Bogenlänge s sein. Wir verlangen, daß die gesuchten Funktionen $u(xy)$, $v(xy)$ stetig, im Innern von Ω stetig differenzierbar seien. Aus diesen Annahmen folgt auch die Stetigkeit, bei Annäherung an C , derjenigen Verbindungen der ersten Ableitungen, welche auf den linken Seiten von (1) vorkommen. Wir setzen voraus, daß im Falle $f(s) = 0$ das einzige Lösungssystem der genannten Art das System

$$u(xy) = 0, \quad v(xy) = 0$$

ist.

Nach § 3, VII ergeben unsere Annahmen das System von Integralgleichungen:

$$3) \quad \begin{cases} u(\xi\eta) = \mathbf{u}(\xi\eta) + \iint_{\Omega} \{K_{11}(\xi\eta, xy) u(xy) + K_{12}(\xi\eta, xy) v(xy)\} dR \\ v(\xi\eta) = \mathbf{v}(\xi\eta) + \iint_{\Omega} \{K_{21}(\xi\eta, xy) u(xy) + K_{22}(\xi\eta, xy) v(xy)\} dR, \end{cases}$$

wobei

$$4) \quad \begin{cases} 2\pi \mathbf{u}(\xi\eta) = \int_S \frac{\partial G(\xi\eta, s)}{\partial n} f(s) ds \\ 2\pi \mathbf{v}(\xi\eta) = - \int_S \frac{\partial H(\xi\eta, s)}{\partial s} f(s) ds \end{cases}$$

$$4) \quad \begin{cases} 2\pi K_{11}(\xi\eta, xy) = \frac{\partial G(\xi\eta, xy)}{\partial x} A(xy) + \frac{\partial G(\xi\eta, xy)}{\partial y} C(xy) \\ 2\pi K_{12}(\xi\eta, xy) = \frac{\partial G(\xi\eta, xy)}{\partial x} B(xy) + \frac{\partial G(\xi\eta, xy)}{\partial y} D(xy) \\ 2\pi K_{21}(\xi\eta, xy) = \frac{\partial H(\xi\eta, xy)}{\partial y} A(xy) - \frac{\partial H(\xi\eta, xy)}{\partial x} C(xy) \\ 2\pi K_{22}(\xi\eta, xy) = \frac{\partial H(\xi\eta, xy)}{\partial y} B(xy) - \frac{\partial H(\xi\eta, xy)}{\partial x} D(xy) + 1. \end{cases}$$

Die Funktionen $u(xy)$, $v(xy)$ sind stetig differenzierbare, im Innern von Ω analytische Funktionen (§ 3, VIIIb). Die Funktionen $K_{ij}(\xi\eta, xy)$ ($i, j = 1, 2$) sind im allgemeinen stetig;

¹⁾ Hier und in andern ähnlichen Fällen beachte man die Erklärung dieser Benennungsweise, § 3, I.

bei gleichzeitiger Annäherung der Punkte $(\xi\eta)$, (xy) zu einem gemeinsamen Grenzpunkt haben sie eine Singularität erster Ordnung.

Sind u , v stetige, im Innern von Ω stetig differenzierbare Funktionen, welche die Integralgleichungen 3) erfüllen, so erfüllen sie auch nach § 3, VIIIa, b die Differentialgleichungen 1) und die Randbedingung 2). Wir haben also den Satz:

Für stetige, im Innern von Ω stetig differenzierbare Funktionen u , v ist das Differentialgleichungssystem 1) nebst der Randbedingung 2) mit dem Integralgleichungssystem 3) äquivalent.

II. Die allgemeinen Sätze über Integralgleichungen vermögen nur die Stetigkeit einer Lösung zu behaupten; um hier Auskunft über die Existenz der Ableitungen zu erhalten, bedienen wir uns des Kunstgriffes der Zusammensetzung des Kernes. Wir setzen nämlich in die rechten Seiten von 3) die Werte von u , v ein, die eben durch 3) geliefert werden; mit Rücksicht auf § 3, IIIb finden wir:

$$5) \quad \begin{cases} u(\xi\eta) = \mathfrak{U}(xy) + \iint_{\Omega} \{\Phi_{11}(\xi\eta, xy) u(xy) + \Phi_{12}(\xi\eta, xy) v(xy)\} dR \\ v(\xi\eta) = \mathfrak{V}(xy) + \iint_{\Omega} \{\Phi_{21}(\xi\eta, xy) u(xy) + \Phi_{22}(\xi\eta, xy) v(xy)\} dR, \end{cases}$$

wobei

$$6) \quad \begin{cases} \mathfrak{U}(\xi\eta) = u(\xi\eta) + \iint_{\Omega} \{K_{11}(\xi\eta, xy) u(xy) + K_{12}(\xi\eta, xy) v(xy)\} dR \\ \mathfrak{V}(\xi\eta) = v(\xi\eta) + \iint_{\Omega} \{K_{21}(\xi\eta, xy) u(xy) + K_{22}(\xi\eta, xy) v(xy)\} dR \\ \Phi_{ij}(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2) = \iint_{\Omega} \{K_{i1}(\xi_1\eta_1, xy) K_{1j}(xy, \xi_2\eta_2) \\ \qquad \qquad \qquad + K_{i2}(\xi_1\eta_1, xy) K_{2j}(xy, \xi_2\eta_2)\} dR \\ \qquad \qquad \qquad [i, j = 1, 2]. \end{cases}$$

Die Funktionen $\mathfrak{U}(\xi\eta)$, $\mathfrak{V}(\xi\eta)$ sind nach § 3, VIIIb stetig, im Innern von Ω stetig differenzierbar. Die Funktionen $\Phi_{ij}(\xi\eta, xy)$ [$i, j = 1, 2$] sind im allgemeinen stetig; bei gleichzeitiger Annäherung der Punkte $(\xi\eta)$, (xy) gegen einen gemeinsamen Grenzpunkt haben sie eine logarithmische Singularität (§ 3, IIIa), ferner haben sie genau die in § 3, IVa betrachteten Formen, sodaß die Resultate von § 3, IVb anwendbar sind.

Ist u , v ein stetiges Lösungssystem von 3), so ist es auch ein stetiges Lösungssystem von 5); dann sind aber die Funktionen u , v im Innern von Ω auch stetig differenzierbar (§ 3, IVb). Wir haben also bewiesen:

Jedes stetige Lösungssystem von 3) ist ein stetiges, im Innern von Ω stetig differenzierbares Lösungssystem von 1), 2). Insbesondere existiert außer

$$u_0(xy) = 0, \quad v_0(xy) = 0$$

kein stetiges Lösungssystem der 3) entsprechenden homogenen Integralgleichungen:

$$3_0) \quad \begin{cases} u_0(\xi\eta) = \iint_{\Omega} \{K_{11}(\xi\eta, xy) u_0(xy) + K_{12}(\xi\eta, xy) v_0(xy)\} dR \\ v_0(\xi\eta) = \iint_{\Omega} \{K_{21}(\xi\eta, xy) u_0(xy) + K_{22}(\xi\eta, xy) v_0(xy)\} dR. \end{cases}$$

Was die letzte Behauptung des Satzes betrifft, ist nur zu bemerken, daß die stetigen Funktionen $u_0(xy)$, $v_0(xy)$ eines Lösungssystems nach dem ersten Teile des Satzes auch stetige Ableitungen im Innern von Ω hätten, und daher die Differentialgleichungen 1) mit der Nebenbedingung $u_0(s) = 0$ lösten, was nach Voraussetzung (vgl. I) unmöglich ist.

III. Wir verfahren jetzt auf bekannte Weise, um unser System von zwei Integralgleichungen mit zwei unbekannt Funktionen auf eine einzige Integralgleichung mit einer unbekannt Funktion zu reduzieren. Zu diesem Zweck nehmen wir ein zweites, zu Ω kongruentes, aber beliebig gelegenes Gebiet Ω' ; wir nennen $(\bar{\xi}\bar{\eta})$ den dem Punkt $(\xi\eta)$ von Ω' kongruenten Punkt von Ω , O das aus Ω , Ω' zusammengesetzte Gebiet; und definieren in O

$$7) \quad \begin{cases} w(\xi\eta) = \begin{cases} u(\xi\eta) & \text{für } (\xi\eta) \text{ in } \Omega \\ v(\bar{\xi}\bar{\eta}) & \text{für } (\xi\eta) \text{ in } \Omega' \end{cases} \\ K(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2) = \begin{cases} K_{11}(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2) & \text{für } (\xi_1\eta_1) \text{ in } \Omega, (\xi_2\eta_2) \text{ in } \Omega \\ K_{12}(\xi_1\eta_1, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2) & \text{für } (\xi_1\eta_1) \text{ in } \Omega, (\xi_2\eta_2) \text{ in } \Omega' \\ K_{21}(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, \xi_2\eta_2) & \text{für } (\xi_1\eta_1) \text{ in } \Omega', (\xi_2\eta_2) \text{ in } \Omega \\ K_{22}(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2) & \text{für } (\xi_1\eta_1) \text{ in } \Omega', (\xi_2\eta_2) \text{ in } \Omega', \end{cases} \end{cases}$$

mit ähnlich gebildeten Ausdrücken für die Funktionen \mathfrak{w} , \mathfrak{W} , w_0 und Φ . Wir bekommen für die Gleichungssysteme 3), 5), 3_0) und die Relationen 6) die neuen Formen:

$$3') \quad w(\xi\eta) = \mathfrak{w}(\xi\eta) + \iint_O K(\xi\eta, xy) w(xy) dR$$

$$5') \quad w(\xi\eta) = \mathfrak{W}(\xi\eta) + \iint_O \Phi(\xi\eta, xy) w(xy) dR$$

$$\begin{aligned}
 6') \quad & \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{W}(\xi\eta) &= \mathfrak{w}(\xi\eta) + \iint_O K(\xi\eta, xy) \mathfrak{w}(xy) dR \\ \Phi(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2) &= \iint_O K(\xi_1\eta_1, xy) K(xy, \xi_2\eta_2) dR \end{aligned} \right. \\
 3'_0) \quad & w_0(\xi\eta) = \iint_O K(\xi\eta, xy) w_0(xy) dR.
 \end{aligned}$$

Nach der Theorie der Integralgleichungen sollte eine und nur eine stetige Lösung von 3') existieren, da keine von Null verschiedene stetige Lösung von 3'_0) existiert. Doch ist dieser Satz durch die Fredholmschen Formeln¹⁾), eventuell im erweiterten Sinne von Hilbert²⁾), zunächst nur für Kerne bewiesen, deren Singularitäten von niedrigerer als erster Ordnung sind. Wir wollen uns daher in der Weiterführung dieser Betrachtungen auf die Gleichung 5) stützen, die einen nur logarithmisch singulären Kern hat. Wir brauchen die anderen Integralgleichungen:

$$\begin{aligned}
 3''_0) \quad & w_{00}(\xi\eta) = \iint_O K(xy, \xi\eta) w_{00}(xy) dR \\
 3'_0-) \quad & z_0(\xi\eta) = - \iint_O K(\xi\eta, xy) z_0(xy) dR \\
 3''_0-) \quad & z_{00}(xy) = - \iint_O K(xy, \xi\eta) z_{00}(xy) dR \\
 5'_0) \quad & w_0(\xi\eta) = \iint_O \Phi(\xi\eta, xy) w_0(xy) dR \\
 5''_0) \quad & w_{00}(\xi\eta) = \iint_O \Phi(xy, \xi\eta) w_{00}(xy) dR.
 \end{aligned}$$

IV. Es tritt hier die Schwierigkeit auf, daß die 5') entsprechende homogene Gleichung 5'_0) eventuell von Null verschiedene stetige Lösungen besitzen kann; in diesem Falle besitzt auch die homogene Gleichung mit transponiertem Kern 5''_0) von Null verschiedene stetige Lösungen. Wir zeigen, daß jedenfalls folgender Satz gilt:

Jede stetige Lösung von 5'_0) ist zugleich eine Lösung von 3'_0-); jede stetige Lösung von 5''_0) ist zugleich eine Lösung von 3''_0-).

Es sei $w_0(\xi\eta)$ irgend welche stetige Lösung von 5'_0); dann ist, wie man durch einfache

¹⁾ Acta mathematica, Bd. 27 (1903), S. 365–390.

²⁾ Göttinger Nachrichten (1904), S. 82.

Substitution (und vermöge § 3, VIIIb) erkennt,

$$w_0(\xi\eta) + \iint_O K(\xi\eta, xy) w_0(xy) dR$$

eine stetige (§ 3, IIa) Lösung von 3'₀); nach Voraussetzung kann sie nur gleich Null sein, womit die erste Behauptung des Satzes bestätigt ist. Die zweite Behauptung wäre ebenfalls auf dieselbe Weise bewiesen, wenn wir wüßten, daß die Gleichung 3''₀) keine von Null verschiedene stetige Lösung hätte. Zur Vervollständigung des Beweises ist also nur noch folgender Satz (welcher für Kerne mit niederen Singularitäten von vorn herein gilt), nötig:

V. Da 3'₀) keine von Null verschiedene stetige Lösung hat, so hat auch 3''₀) keine von Null verschiedene stetige Lösung.

Es sei $w_{00}(\xi\eta)$ eine stetige Lösung von 3''₀), daher auch eine Lösung von 5''₀). Da 3'₀) keine von Null verschiedene stetige Lösungen hat, so hat die Gleichung

$$W(\xi\eta) = w_{00}(\xi\eta) + \iint_O K(\xi\eta, xy) W(xy) dR$$

eine stetige Lösung, die notwendig auch der Gleichung

$$W(\xi\eta) = \{w_{00}(\xi\eta) + \iint_O K(\xi\eta) w_{00}(xy) dR\} + \iint_O \Phi(\xi\eta, xy) w_{00}(xy) dR$$

genügt. Bekanntlich muß dann die Bedingung erfüllt sein:

$$\iint_O w_{00}(xy) \{w_{00}(xy) + \iint_O K(xy, x_1y_1) w_{00}(x_1y_1) dR_1\} dR = 0,$$

d. h.

$$2 \iint_O \{w_{00}(xy)\}^2 dR = 0,$$

woraus die Behauptung folgt

$$w_{00}(\xi\eta) = 0.$$

VI. Ist $w(\xi\eta)$ eine stetige Lösung von 5'), so existiert eine und nur eine stetige Lösung von 3'); und zwar ist sie gleich

$$\frac{1}{2} \{w(\xi\eta) + w(\xi\eta) + \iint_O K(\xi\eta, xy) w(xy) dR\}.$$

In der Tat, schreiben wir

$$2W(\xi\eta) = \mathfrak{w}(\xi\eta) + w(\xi\eta) + \iint_O K(\xi\eta, xy) w(xy) dR,$$

so finden wir

$$\begin{aligned} 2 \iint_O K(\xi\eta, xy) W(xy) dR &= \iint_O K(\xi\eta, xy) \mathfrak{w}(xy) dR \\ &\quad + \iint_O K(\xi\eta, xy) w(xy) dR + \iint_O \Phi(\xi\eta, xy) w(xy) dR \\ &= \{\mathfrak{W}(\xi\eta) - \mathfrak{w}(\xi\eta)\} + \iint_O K(\xi\eta, xy) w(xy) dR + \{w(\xi\eta) - \mathfrak{W}(\xi\eta)\} \\ &= -2\mathfrak{w}(\xi\eta) + 2W(\xi\eta), \end{aligned}$$

was zu beweisen war. Daß 3') nur eine stetige Lösung besitzt, ist klar, denn die Differenz zweier Lösungen muß 3'_0) befriedigen, also nach Voraussetzung gleich Null sein.

VII. Wir haben jetzt alle Hilfsmittel in der Hand, um die in III, IV genannten Schwierigkeiten zu beseitigen. Es gilt nämlich folgender Satz:

Die Gleichung 3') besitzt eine und nur eine stetige Lösung.

Um den Beweis zu führen, genügt es nach VI, irgend eine Lösung von 5') zu finden; wir zeigen, daß eine stetige Lösung von 5') sicher vorhanden ist, selbst wenn die homogene Gleichung 5'_0) Lösungen besitzt. Es sei $w_{00}(\xi\eta)$ irgend eine stetige Lösung von 5''_0); nach IV ist $w_{00}(\xi\eta)$ eine Lösung von 3''_0-). Hieraus folgt durch Multiplikation mit $\mathfrak{w}(\xi\eta)$ und Integration:

$$\iint_O w_{00}(xy) \mathfrak{w}(xy) dR + \iint_O \iint_O k(x_1y_1, xy) w_{00}(x_1y_1) \mathfrak{w}(xy) dR_1 dR = 0,$$

d. h. nach 6')

$$\iint_O w_{00}(xy) \mathfrak{W}(xy) dR = 0.$$

Diese Gleichung, die für jede Lösung $w_{00}(\xi\eta)$ von 5''_0) gilt, gibt genau die bekannte Bedingung an, daß 5'_0) eine Lösung besitze. Damit ist der Satz bewiesen. Als Gesamtergebnis haben wir also das

VIII. Existenztheorem: Wenn das System 1) außer $u(xy) = 0$, $v(xy) = 0$ kein solches stetiges, im Innern von Ω stetig differenzierbares Lösungssystem besitzt, daß $u(s) = 0$, so gibt es ein und

nur ein solches stetiges, im Innern von Ω stetig differenzierbares Lösungssystem, daß $u(s) = f(s)$.

Dieses Resultat, welches für sich befriedigend ist, werden wir nachher verallgemeinern, indem wir allgemeine lineare Randbedingungen zulassen. Es muß aber doch hier bemerkt werden, daß das Theorem eventuell keine Auskunft liefert. Zum Beispiel schon das einfache System:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

hat außer $u = 0, v = 0$ noch die Lösungen $u = 0, v = \text{Konstante}$; sodaß wir aus dem Existenztheorem nicht entscheiden könnten, ob bei gegebenen Randwerten $u(s) = f(s)$ Lösungen existieren oder nicht. Um diese Frage zu berücksichtigen, schalten wir hier eine Erweiterung des Theorems VIII ein, welche wir aber nur für die vorliegenden einfacheren Randwerte aussprechen und beweisen wollen.

Wenn wir einem gesuchten Lösungssystem die Bedingung

$$\iint_{\Omega} v(xy) dx dy = 0$$

aufzulegen, so fällt derjenige Bestandteil der zweiten Gleichung 3) weg, der vom Glied +1 in der Definition 4) von $K_{22}(\xi\eta, xy)$ herrührt. Umgekehrt, erfüllt $v(\xi\eta)$ die so veränderte zweite Gleichung 3), so ist nach § 3, VIIIb obige Bedingung erfüllt. Wir können also alle Schlüsse bei diesem neuen Problem ganz ähnlich wie in dem früheren durchführen, und erhalten auf diese Weise das erweiterte Existenztheorem:

Wenn das System 1) außer $u(xy) = 0, v(xy) = 0$ kein solches stetiges, im Innern von Ω stetig differenzierbares Lösungssystem besitzt, daß

$$u(s) = 0, \quad \iint_{\Omega} v(xy) dR = 0,$$

so gibt es ein und nur ein solches stetiges, im Innern von Ω stetig differenzierbares Lösungssystem, daß

$$u(s) = f(s), \quad \iint_{\Omega} v(xy) dR = 0;$$

aus diesem einen Lösungssystem für die Randwertbedingung $u(s) = f(s)$ entsteht das allgemeine, indem man dazu das allgemeine Lösungssystem für die Randwertbedingung $u(s) = 0$ addiert.

Wie man leicht sieht, liefert dies Theorem auch in dem genannten Spezialfall die Existenz einer Lösung.

Wir wollen schließlich das erste Theorem auf eine beliebige Randwertbedingung ausdehnen.

IX. Allgemeines Existenztheorem: Wenn das System 1) außer $u(xy) = 0$, $v(xy) = 0$ kein solches stetiges, im Innern von Ω stetig differenzierbares Lösungssystem besitzt, daß $\alpha(s)u(s) + \beta(s)v(s) = 0$, so gibt es ein und nur ein solches stetiges, im Innern von Ω stetig differenzierbares Lösungssystem, daß

$$\alpha(s)u(s) + \beta(s)v(s) = f(s).$$

Für die neuen Funktionen $\alpha(s)$, $\beta(s)$ stellen wir dieselbe Bedingung, wie für $f(s)$: stetige Differenzierbarkeit; außerdem verlangen wir, daß sie nie gleichzeitig verschwinden. Wir nehmen zwei sonst beliebige, zweimal stetig differenzierbare Funktionen $\alpha(xy)$, $\beta(xy)$, welche die Bedingung

$$\{\alpha(xy)\}^2 + \{\beta(xy)\}^2 > 0$$

erfüllen und auf S die Werte $\alpha(s)$, $\beta(s)$ annehmen. Die Transformation

$$\begin{cases} U = \alpha u + \beta v \\ V = -\beta u + \alpha v \end{cases}$$

ist alsdann nicht singulär, und hat die Inverse

$$\begin{cases} u = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} U - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} V \\ v = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} U + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} V. \end{cases}$$

Auf 3) angewandt, liefert die Transformation nach der Bezeichnungsweise von § 2:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \mathfrak{L}(U, V) \\ \lambda_2 = -\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \mathfrak{L}(U, V); \end{cases}$$

daraus wird durch die lineare Zusammensetzung

$$\begin{cases} \Lambda_1 = \alpha\lambda_1 - \beta\lambda_2 \\ \Lambda_2 = \beta\lambda_1 + \alpha\lambda_2 \end{cases}$$

$$8) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = \mathfrak{L}(U, V) \\ \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} = \mathfrak{L}(U, V) \end{cases}$$

ein System von derselben Gestalt wie 3) selbst; auch sind die Koeffizienten von U, V in den Ausdrücken $\mathfrak{L}(U, V)$ einmal stetig differenzierbar, wie es in der ursprünglichen Form der Fall war. Gibt es kein solches Lösungssystem von 1), daß $\alpha(s)u(s) + \beta(s)v(s) = 0$, so gibt es kein solches Lösungssystem von 8), daß $U(s) = 0$, da das erstere aus dem letzteren durch die gebrauchte Transformation hervorgehen würde. Es existiert also, nach dem ersten Existenztheorem, ein solches Lösungssystem von 8), daß $U(s) = f(s)$; die Transformation liefert alsdann ein solches Lösungssystem von 1), daß $\alpha(s)u(s) + \beta(s)v(s) = f(s)$, womit das Theorem bewiesen ist.

Drittes Kapitel.

Das hyperbolische System.

§ 5. Lösung der Randwertaufgabe für das hyperbolische System.

Wir kommen jetzt zur Untersuchung des hyperbolischen Systems, welches wir wieder in der Normalform annehmen. Die Theorie verhält sich in diesem Falle besonders einfach; sie entbehrt vollständig der Schwierigkeiten, die uns schon in dem elliptischen Falle in Bezug auf Greensche Funktionen und uneigentliche Integrale begegnet sind, und die sich größtenteils später in dem parabolischen Fall wiederholen werden. Auch die Resultate, wie von vorn herein zu erwarten war, sind ganz verschieden von den Resultaten bei dem elliptischen System. Wir werden Randbedingungen nicht auf einer geschlossenen Kurve, sondern auf einer offenen Kurve studieren: ferner geben wir nicht nur eine Relation zwischen den beiden unbekanntenen Funktionen, sondern die Werte der einzelnen Funktionen selbst, d. h. zwei Relationen. Im elliptischen Fall haben wir das Problem zuerst für eine spezielle Randbedingung gelöst, ohne Einschränkung auf das Gleichungssystem; hier werden wir dagegen zunächst nur ein spezielles System von Differentialgleichungen betrachten und nachher die Theorie des allgemeinen Systems daraus folgern.

I. Es möge Ω ein Rechteck der xy -Ebene bedeuten:

$$a_1 \leq x \leq x_2, \quad b_1 \leq y \leq b_2;$$

zwei diagonal gegenüberliegende Ecken, etwa $(a_1 b_1)$ und $(a_2 b_2)$ seien durch eine stetige Kurve S verbunden, welche von jeder in Ω gezogenen horizontalen und vertikalen Geraden

in einem und nur einem Punkt getroffen wird. Die Kurve S darf dann in den beiden Formen

$$y = \chi(x), \quad x = \psi(y)$$

dargestellt werden, wobei $\chi(x)$, $\psi(y)$ stetige Funktionen sind. Das Gebiet, welches von der Kurve S und den beiden Geraden $x = \xi$, $y = \eta$ begrenzt ist, nennen wir $\Omega_{\xi\eta}$. Wir suchen ein Funktionenpaar $u(xy)$, $v(xy)$, welches dem Differentialgleichungssystem

$$1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = B(xy) v \\ \frac{\partial v}{\partial y} = C(xy) u \end{cases}$$

genügt und auf der Kurve S die Bedingungen

$$2) \quad \begin{cases} u(\psi(y), y) = f(y) \\ v(x, \chi(x)) = g(x) \end{cases}$$

erfüllt. Dabei sollen $B(xy)$, $C(xy)$, $f(y)$, $g(x)$ stetige Funktionen sein. Von den gesuchten Funktionen $u(xy)$, $v(xy)$ verlangen wir, daß sie stetig seien und die stetigen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ besitzen.

Integrieren wir die erste Gleichung 1) nach x zwischen den Grenzen $\psi(y)$ und ξ , die zweite nach y zwischen den Grenzen $\chi(x)$ und η , so bekommen wir unter Berücksichtigung von 2) und mit kleinen Aenderungen der Bezeichnung:

$$3) \quad \begin{cases} u(\xi\eta) = f(\eta) + \int_{\psi(\eta)}^{\xi} B(x\eta)v(x\eta) dx \\ v(\xi\eta) = g(\xi) + \int_{\chi(\xi)}^{\eta} C(\xi y)u(\xi y) dy. \end{cases}$$

Umgekehrt, sind $u(xy)$, $v(xy)$ stetige Lösungen von 3), so sind auch $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ stetig, und u , v befriedigen 1) und 2).

In jeder der Formeln 3) setzen wir in das Integral die andere Formel ein; wir bekommen auf diese Weise die neuen Formeln:

$$u(\xi\eta) = f(\eta) + \int_{\psi(\eta)}^{\xi} B(x\eta)g(x) dx + \int_{\psi(\eta)}^{\xi} B(x\eta) \int_{\chi(x)}^{\eta} C(xy) u(xy) dy dx$$

$$v(\xi\eta) = g(\xi) + \int_{\chi(\xi)}^{\eta} C(\xi y) f(y) dy + \int_{\chi(\xi)}^{\eta} C(\xi y) \int_{\psi(y)}^{\xi} B(xy) v(xy) dx dy.$$

Diese lassen sich auch in der Form schreiben:

$$4') \quad u(\xi\eta) = u(\xi\eta) + \iint_{\Omega_{\xi\eta}} K(\xi\eta, xy) u(xy) dR$$

$$4'') \quad v(\xi\eta) = v(\xi\eta) + \iint_{\Omega_{\xi\eta}} L(\xi\eta, xy) v(xy) dR,$$

wo

$$5) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(\xi\eta) = f(\eta) + \int_{\psi(\eta)}^{\xi} B(x\eta) g(x) dx \\ v(\xi\eta) = g(\xi) + \int_{\chi(\xi)}^{\eta} C(\xi y) f(y) dy \\ K(\xi\eta, xy) = -B(x\eta) C(xy) \text{ } ^1) \\ L(\xi\eta, xy) = -C(\xi y) B(xy). \end{array} \right.$$

Wir haben also zwei getrennte Integralgleichungen für u , v .

Es fragt sich jetzt, ob umgekehrt die Formeln 3) aus den Integralgleichungen 4'), 4'') folgen. Wir nehmen an, u , v befriedigen die Gleichungen 4'), 4''), setzen

$$u_0(\xi\eta) = u(\xi\eta) - f(\eta) - \int_{\psi(\eta)}^{\xi} B(x\eta) v(x\eta) dx$$

$$v_0(\xi\eta) = v(\xi\eta) - g(\xi) - \int_{\chi(\xi)}^{\eta} C(\xi y) u(\xi y) dy,$$

und versuchen zu beweisen, daß $u_0(\xi\eta) = 0$, $v_0(\xi\eta) = 0$. Aus den eben gegebenen Definitionen von u_0 , v_0 folgt sogleich, daß

$$\int_{\psi(\eta)}^{\xi} B(x\eta) v_0(x\eta) dx = \int_{\psi(\eta)}^{\xi} B(x\eta) v(x\eta) dx - \int_{\psi(\eta)}^{\xi} B(x\eta) g(x) dx$$

$$- \int_{\psi(\eta)}^{\xi} B(x\eta) \int_{\chi(x)}^{\eta} C(xy) u(xy) dy dx$$

¹⁾ Wir schreiben hier das negative Vorzeichen; denn die doppelten Integrationen liefern das Negative der Doppelintegrale über $\Omega_{\xi\eta}$. Bei anderer Wahl der durch die Kurve S verbundenen Ecken würde das positive Vorzeichen hier vorkommen.

$$\begin{aligned}
 &= \{-u_0(\xi\eta) + u(\xi\eta) - f(\eta)\} + \{f(\eta) - u(\xi\eta)\} + \{u(\xi\eta) - u(\xi\eta)\} \\
 &= -u_0(\xi\eta);
 \end{aligned}$$

wir haben also

$$u_0(\xi\eta) = - \int_{\psi(\eta)}^{\xi} B(x\eta) v_0(x\eta) dx$$

und ähnlich

$$v_0(\xi\eta) = - \int_{\chi(\xi)}^{\eta} C(\xi y) u_0(\xi y) dy;$$

setzen wir jede dieser Formeln in die andere ein, so sehen wir, daß

$$4'_0) \quad u_0(\xi\eta) = - \iint_{\Omega_{\xi\eta}} K(\xi\eta, xy) u_0(xy) dR$$

$$4''_0) \quad v_0(\xi\eta) = - \iint_{\Omega_{\xi\eta}} L(\xi\eta, xy) v_0(xy) dR.$$

Wenn diese beiden Gleichungen keine von Null verschiedenen stetigen Lösungen besitzen, so müssen $u_0(\xi\eta)$ und $v_0(\xi\eta)$ identisch Null sein, und die Formeln 3) folgen aus 4'), 4''). Wir fassen die bis jetzt erhaltenen Resultate in einen Satz zusammen.

Sind $u(xy)$, $v(xy)$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ stetig und befriedigen das Gleichungssystem 1) und die Randbedingungen 2), so ist u eine Lösung der Integralgleichung 4'), v eine Lösung der Integralgleichung 4''). Haben die entsprechenden homogenen Integralgleichungen 4'_0), 4''_0) keine von Null verschiedenen stetigen Lösungen, und ist u eine stetige Lösung von 4'), v eine stetige Lösung von 4''), so sind auch $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ stetig, und u , v befriedigen das Gleichungssystem 1) und die Randbedingungen 2).

II. Das Integrationsgebiet $\Omega_{\xi\eta}$ in den Integralgleichungen 4'), 4'') hängt von den Parametern ξ , η ab; um ein nicht variables Gebiet zu bekommen, erweitern wir die Definition der Kerne, indem wir einfach setzen

$$\left. \begin{aligned}
 K(\xi\eta, xy) &= 0 \\
 L(\xi\eta, xy) &= 0
 \end{aligned} \right\} \text{für } (xy) \text{ außerhalb } \Omega_{\xi\eta}.$$

Die Integralgleichungen nehmen dann die Formen

$$u(\xi\eta) = \mathbf{u}(\xi\eta) + \iint_{\Omega} K(\xi\eta, xy) u(xy) dR$$

$$v(\xi\eta) = \mathbf{v}(\xi\eta) + \iint_{\Omega} L(\xi\eta, xy) v(xy) dR$$

an. Diese sind Gleichungen der von Fredholm behandelten Art, sodaß wir schließen können:

Haben die homogenen Gleichungen $4'_0$), $4''_0$) keine von Null verschiedenen stetigen Lösungen, so hat jede der Gleichungen $4'$), $4''$) eine und nur eine Lösung.

Nach diesem Satze und dem in I bewiesenen, ist unser Problem vollständig gelöst, wenn die Gleichungen $4'_0$), $4''_0$) die einzigen stetigen Lösungen $u_0 = 0$, $v_0 = 0$ besitzen. Wir zeigen schließlich, daß dies immer zutrifft.

III. Die Gleichungen $4'_0$), $4''_0$) haben keine von Null verschiedenen stetigen Lösungen.

Es sei

$$|K(\xi\eta, xy)| < k, \quad |u_0(\xi\eta)| < m,$$

wo $u_0(\xi\eta)$ irgend eine stetige Lösung von $4'_0$) bedeutet. Alsdann ist für jeden zur linken Seite von S liegenden Punkt $(\xi\eta)$,

$$|u_0(\xi\eta)| \leq \iint_{\Omega_{\xi\eta}} km dR \leq \int_{\xi}^{a_2} \int_{b_1}^{\eta} dy dx = km(a_2 - \xi)(\eta - b_1);$$

$$|u_0(\xi\eta)| \leq \iint_{\Omega_{\xi\eta}} k^2 m (a_2 - x)(y - b_1) dR \leq k^2 m \int_{\xi}^{a_2} \int_{b_1}^{\eta} (a_2 - x)(y - b_1) dy dx$$

$$= k^2 m \frac{(a_2 - \xi)^2}{2!} \frac{(\eta - b_1)^2}{2!};$$

und im allgemeinen

$$|u_0(\xi\eta)| \leq k^n m \frac{(a_2 - \xi)^n}{n!} \frac{(\eta - b_1)^n}{n!}$$

für jedes positive, ganzzahlige n . Ebenso gilt für Punkte $(\xi\eta)$, die zur rechten Seite von S liegen:

$$|u_0(\xi\eta)| \leq k^n m \frac{(\xi - a_1)^n}{n!} \frac{(b_2 - \eta)^n}{n!};$$

also für alle Punkte $(\xi\eta)$ von Ω

$$|u_0(\xi\eta)| \leq k^n m \frac{(a_2 - a_1)^n}{n!} \frac{(b_2 - b_1)^n}{n!}.$$

Beim Grenzübergang $n = \infty$ wird die rechte Seite dieser Ungleichung Null; daher muß

$$u_0(\xi\eta) = 0$$

sein. Ein genau ähnlicher Beweis zeigt, daß $v_0(\xi\eta) = 0$.

Wir haben also folgendes Resultat:

Existenztheorem A: Das System 1) nebst den Randbedingungen 2) hat ein und nur ein Lösungssystem u, v , wobei $u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ stetig sind.

IV. Sind $x = a, y = b$ zwei Gerade in Ω so können wir die Randbedingung 2) durch folgende ersetzen:

$$6) \quad \begin{cases} u(ay) = f(y) \\ v(xb) = g(x). \end{cases}$$

Jeder Schritt wird jetzt ähnlich wie vorhin ausgeführt; wir bekommen die Integralgleichungen

$$\begin{aligned} u(\xi\eta) &= f(\eta) + \int_a^\xi B(x\eta) g(x) dx + \int_a^\xi \int_b^\eta B(x\eta) C(xy) u(xy) dy dx \\ v(\xi\eta) &= g(\xi) + \int_b^\eta C(\xi y) f(y) dy + \int_a^\xi \int_b^\eta B(xy) C(\xi y) v(xy) dy dx, \end{aligned}$$

welche genau dieselbe Behandlung gestatten wie die früheren¹⁾. Wir haben also das

Existenztheorem B: Das System 1) nebst den Randbedingungen 6) hat ein und nur ein Lösungssystem u, v , wobei $u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ stetig sind.

V. Allgemeines Existenztheorem A: Das System

$$7) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = A(xy) u + B(xy) v \\ \frac{\partial v}{\partial y} = C(xy) u + D(xy) v \end{cases}$$

nebst den Randbedingungen 2) hat ein und nur ein Lösungssystem u, v , wobei $u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ stetig sind.

¹⁾ Integralgleichungen von der letzten Form waren schon vor der Fredholmschen Abhandlung von Volterra untersucht worden; vgl. Atti della Reale Accademia dei Lincei, Bd. 5 (1896), S. 289–300.

Allgemeines Existenztheorem *B*. Das System 7) nebst den Randbedingungen 6) hat ein und nur ein Lösungssystem u, v , wobei $u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ stetig sind.

Wir setzen hier voraus, daß A, B, C, D stetig sind. Machen wir die Transformation

$$\begin{cases} u = e^{\int^x A(sy) ds} U \\ v = e^{\int^y D(xs) ds} U, \end{cases}$$

so nehmen die Gleichungen 7) die Form 1) an. Die Form der Randbedingungen bleibt ungeändert. Die frühere Theorie kann also unmittelbar angewandt werden.

Viertes Kapitel.

Das parabolische System.

§ 6. Hilfsmittel zur Theorie des parabolischen Systems.

Es sollen im gegenwärtigen Paragraphen einige Hilfssätze für das parabolische System bewiesen werden, die denjenigen in § 3 für das elliptische System ähnlich sind. Dort haben wir uns auf die Potentialtheorie gestützt; d. h. auf die Theorie der Laplaceschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

und der Poissonschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi(xy);$$

hier werden wir ähnlich von der Theorie der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

und der entsprechenden nicht homogenen Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(xy)$$

Gebrauch machen.

Bei der ersteren Gleichung bedienen wir uns teilweise der Resultate von Holmgren¹⁾; bei der letztern werden wir die notwendigen Sätze herleiten²⁾.

I. Es soll Ω ein Gebiet der xy -Ebene bedeuten, welches von den Geraden $x = a$, $x = b$ ($b > a$) und zwei Kurven $S_1 : y = \chi_1(x)$, $S_2 : y = \chi_2(x)$ begrenzt ist, wo $\chi_1(x)$, $\chi_2(x)$ für $a \leq x \leq b$ solche zweimal stetig differenzierbare Funktionen sind, daß stets

$$\chi_2(x) > \chi_1(x).$$

Derjenige Teil des Gebietes Ω , der durch die Ordinaten $x = \xi_1$, $x = \xi_2$ begrenzt ist, werde mit $\xi_1 \Omega_{\xi_2}$ bezeichnet. Den Wert einer Funktion $f(x, y)$ in einem Punkte $(x, \chi_i(x))$ der Kurve S_i werden wir einfach $f(x, \chi_i)$ schreiben [$i = 1, 2$]. Die Bezeichnungen $f(x, y, \xi, \chi_1)$, $f(x, \chi_1, \xi, \chi_2)$ u. s. w. sind ebenso statt $f(x, y; \xi, \chi_1(\xi))$, $f(x, \chi_1(x); \xi, \chi_2(\xi))$ gebraucht.

Von besonderer Wichtigkeit für die gegenwärtige Theorie ist eine Funktion, die wir mit $t(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2)$ bezeichnen und folgendermaßen definieren:

$$t(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) = \begin{cases} +\frac{\eta_2 - \eta_1}{2\sqrt{\xi_2 - \xi_1}} & \\ \int e^{-z^2} dz & \text{für } \xi_2 > \xi_1 \\ -\frac{\eta_2 - \eta_1}{2\sqrt{\xi_2 - \xi_1}} & \\ \sqrt{\pi} & \text{für } \xi_2 = \xi_1, \eta_2 > \eta_1 \\ -\sqrt{\pi} & \text{für } \xi_2 = \xi_1, \eta_2 < \eta_1. \end{cases}$$

Wir finden leicht, daß

$$\frac{\partial t(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2)}{\partial \xi_1} = -\frac{\partial t(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2)}{\partial \xi_2} = \begin{cases} \frac{\eta_2 - \eta_1}{2(\xi_2 - \xi_1)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\eta_2 - \eta_1)^2}{4(\xi_2 - \xi_1)}} & \text{für } \xi_2 > \xi_1 \\ 0 & \text{für } \xi_2 = \xi_1, \eta_2 \neq \eta_1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial t(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2)}{\partial \eta_1} = -\frac{\partial t(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2)}{\partial \eta_2} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{\xi_2 - \xi_1}} e^{-\frac{(\eta_2 - \eta_1)^2}{4(\xi_2 - \xi_1)}} & \text{für } \xi_2 > \xi_1 \\ 0 & \text{für } \xi_2 = \xi_1, \eta_2 \neq \eta_1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 t(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2)}{\partial \eta_1^2} = \frac{\partial^2 t(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2)}{\partial \eta_2^2} = \begin{cases} -\frac{\eta_2 - \eta_1}{2(\xi_2 - \xi_1)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\eta_2 - \eta_1)^2}{4(\xi_2 - \xi_1)}} & \text{für } \xi_2 > \xi_1 \\ 0 & \text{für } \xi_2 = \xi_1, \eta_2 \neq \eta_1. \end{cases}$$

¹⁾ Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Bd. 3 (1906), No. 12; Bd. 4 (1908), No. 14, No. 18. Bei Zitaten der Holmgrenschen Arbeit ist zu bemerken, daß seine Koordinaten x , y in unserer Bezeichnung vertauscht sind.

²⁾ Die Theorie dieser Gleichung ist auch in ziemlich allgemeiner Weise untersucht worden; vgl. insbesondere Volterra, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles professées à Stockholm, S. 62–82, und E. E. Levi, Atti della Reale Accademia dei Lincei, Serie 5, Bd. 16, 2 (1907) S. 450–456.

Wir sehen, daß die Funktion und ihre Ableitungen für alle Werte der Argumente, für welche $\xi_2 \geq \xi_1$, stetig sind, ausgenommen der Fall $(\xi_1\eta_1) = (\xi_2\eta_2)$, wo t endlich bleibt, die Ableitungen aber unendlich werden; und es gelten die Identitäten:

$$\frac{\partial^2 t(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial t(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)}{\partial \xi_1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 t(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)}{\partial \eta_2^2} - \frac{\partial t(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)}{\partial \xi_2} = 0.$$

IIa. Ist $\varphi(xy)$ stetig, so gelten die Formeln:

$$\mathbf{L}_{\bar{\xi}=\xi^+} \int_{\chi_1(\bar{\xi})}^{\chi_2(\bar{\xi})} \frac{\partial t(\xi\eta, \bar{\xi}y)}{\partial y} \varphi(\bar{\xi}y) dy = 2\sqrt{\pi}\varphi(\xi\eta)$$

$$\mathbf{L}_{\bar{\xi}=\xi^-} \int_{\chi_1(\bar{\xi})}^{\chi_2(\bar{\xi})} \frac{\partial t(\bar{\xi}y, \xi\eta)}{\partial y} \varphi(\bar{\xi}y) dy = -2\sqrt{\pi}\varphi(\xi\eta).$$

Wir geben den Beweis im ersten Fall an. Es sei $|\varphi(xy)| \leq m$; notwendig gilt auch nach Definition der Funktion

$$t(\xi\eta, xy) \leq \sqrt{\pi}.$$

Wir wollen beweisen, daß zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta > 0$ sich wählen läßt, daß

$$|I - 2\sqrt{\pi}\varphi(\xi\eta)| < \varepsilon,$$

wenn

$$|\bar{\xi} - \xi| < \delta;$$

hier bedeutet I das erste der in dem Satz genannten Integrale. Zu dem Zweck wählen wir zunächst δ' so klein, daß

$$|\varphi(\bar{\xi}y) - \varphi(\xi\eta)| < \frac{\varepsilon}{8\sqrt{\pi}},$$

wenn

$$|\bar{\xi} - \xi| < \delta', \quad |y - \eta| < \delta'$$

und schreiben

$$\eta_1 = \eta - \delta', \quad \eta_2 = \eta + \delta'.$$

Wegen der Stetigkeitseigenschaften von t ist es ferner möglich, δ so klein zu wählen, daß

$$\left. \begin{array}{l} |t(\xi\eta, \bar{\xi}\eta_1) + \sqrt{\pi}| \\ |t(\xi\eta, \bar{\xi}\eta_2) - \sqrt{\pi}| \\ |t(\xi\eta, \bar{\xi}\chi_1) + \sqrt{\pi}| \\ |t(\xi\eta, \bar{\xi}\chi_2) - \sqrt{\pi}| \end{array} \right\} < \frac{\varepsilon}{8m},$$

wenn

$$|\bar{\xi} - \xi| < \delta;$$

daraus folgt weiter, daß

$$\begin{aligned} |t(\xi\eta, \bar{\xi}\chi_1) - t(\xi\eta, \bar{\xi}\eta_1)| &< \frac{\varepsilon}{4m} \\ |t(\xi\eta, \bar{\xi}\chi_2) - t(\xi\eta, \bar{\xi}\eta_2)| &< \frac{\varepsilon}{4m}; \end{aligned}$$

außerdem verkleinern wir δ , wenn nötig, so daß

$$\delta < \delta'.$$

Das so erhaltene δ hat die verlangte Eigenschaft. Um dies zu sehen, schreiben wir:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

wo

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\partial t(\xi\eta, \bar{\xi}\eta)}{\partial y} \varphi(\xi\eta) dy \\ I_2 &= \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\partial t(\xi\eta, \bar{\xi}y)}{\partial y} \{\varphi(\bar{\xi}y) - \varphi(\xi\eta)\} dy \\ I_3 &= \int_{\chi_1(\bar{\xi})}^{\eta_1} \frac{\partial t(\xi\eta, \bar{\xi}y)}{\partial y} \varphi(\bar{\xi}y) dy \\ I_4 &= \int_{\eta_2}^{\chi_2(\bar{\xi})} \frac{\partial t(\xi\eta, \bar{\xi}y)}{\partial y} \varphi(\bar{\xi}y) dy. \end{aligned}$$

Alsdann haben wir, wenn $|\bar{\xi} - \xi| < \delta$,

$$\begin{aligned} |I_1 - 2\sqrt{\pi}\varphi(\xi\eta)| &= |\varphi(\xi\eta)| \left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\partial t(\xi\eta, \bar{\xi}y)}{\partial y} dy - 2\sqrt{\pi} \right| \\ &= |\varphi(\xi\eta)| |\{t(\xi\eta, \bar{\xi}\eta_2) - \sqrt{\pi}\} - \{t(\xi\eta, \bar{\xi}\eta_1) + \sqrt{\pi}\}| \\ &< m \left\{ \frac{\varepsilon}{8m} + \frac{\varepsilon}{8m} \right\} = \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |I_2| &< \int_{\eta_1}^{\eta_2} |\varphi(\bar{\xi}y) - \varphi(\xi\eta)| \frac{\partial t(\xi\eta, \bar{\xi}y)}{\partial y} dy \\
 &< \frac{\varepsilon}{8\sqrt{\pi}} |t(\xi\eta, \bar{\xi}\eta_2) - t(\xi\eta, \bar{\xi}\eta_1)| \\
 &< \frac{\varepsilon}{8\sqrt{\pi}} \{\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi}\} = \frac{\varepsilon}{4} \\
 |I_3| &< \int_{\chi_1(\bar{\xi})}^{\eta_1} |\varphi(\bar{\xi}\eta)| \frac{\partial t(\xi\eta, \bar{\xi}y)}{\partial y} dy \\
 &< m |t(\xi\eta, \bar{\xi}\eta_1) - t(\bar{\xi}\eta, \bar{\xi}\chi_1)| \\
 &< m \cdot \frac{\varepsilon}{4m} = \frac{\varepsilon}{4}
 \end{aligned}$$

und ebenso

$$|I_4| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Daher ist

$$|I - 2\sqrt{\pi}\varphi(\xi\eta)| < |I_1 - 2\sqrt{\pi}\varphi(\xi\eta)| + |I_2| + |I_3| + |I_4| < \varepsilon,$$

was zu beweisen war.

IIb. Ist $f(x)$ stetig differenzierbar, so gelten die Formeln:

$$\left. \begin{aligned}
 \underset{(\bar{\xi}\eta)=(\xi\chi_i)}{\mathbf{L}} \int_{\bar{\xi}}^b \frac{\partial t(\bar{\xi}\eta, x\chi_i)}{\partial y} f(x) dx &= \int_{\xi}^b \frac{\partial t(\xi\chi_i, x\chi_i)}{\partial y} f(x) dx \\
 \underset{(\bar{\xi}\eta)=(\xi\chi_i)}{\mathbf{L}} \int_{\bar{\xi}}^b \frac{\partial t(\bar{\xi}\eta, x\chi_i)}{\partial x} f(x) dx &= \int_{\xi}^b \frac{\partial t(\xi\chi_i, x\chi_i)}{\partial x} f(x) dx - (-1)\sqrt{\pi}f(\xi) \\
 \underset{(\bar{\xi}\eta)=(\xi\chi_i)}{\mathbf{L}} \int_a^{\bar{\xi}} \frac{\partial t(x\chi_i, \bar{\xi}\eta)}{\partial y} f(x) dx &= \int_a^{\xi} \frac{\partial t(x\chi_i, \xi\chi_i)}{\partial y} f(x) dx \\
 \underset{(\bar{\xi}\eta)=(\xi\chi_i)}{\mathbf{L}} \int_a^{\bar{\xi}} \frac{\partial t(x\chi_i, \bar{\xi}\eta)}{\partial x} f(x) dx &= \int_a^{\xi} \frac{\partial t(x\chi_i, \xi\chi_i)}{\partial x} f(x) dx - (-1)\sqrt{\pi}f(\xi)
 \end{aligned} \right\} [i = 1, 2].$$

Die zwei letzten Formeln sind von Holmgren bewiesen¹⁾; die beiden ersten lassen sich auf dieselbe Weise herleiten oder folgen aus den beiden andern bei Benutzung

¹⁾ Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Bd. 4 (1908), No. 18, S. 8–12. Der Beweis gestaltet sich etwas einfacher, wenn wir unsere Funktion $t(\xi\eta, xy)$ zu Hilfe nehmen, die in den Holmgrenschen Arbeiten nicht vorkommt.

der Substitution $x' = -x$ in den Integralen, zusammen mit den entsprechenden Bezeichnungsänderungen.

IIIa. Ist $\varphi(xy)$ eine stetige Funktion, so konvergieren die Integrale:

$$\iint_{\xi\Omega_b} t(\xi\eta, xy) \varphi(xy) dR, \quad \iint_{\xi\Omega_b} \frac{\partial t(\xi\eta, xy)}{\partial \xi} \varphi(xy) dR, \quad \iint_{\xi\Omega_b} \frac{\partial t(\xi\eta, xy)}{\partial \eta} \varphi(xy) dR;$$

ferner lassen sie sich als doppelte einfache Integrale auswerten, wobei zuerst nach y , dann nach x integriert wird, und stellen stetige Funktionen dar.

Das erste Integral ist ein eigentliches Integral; der Integrand des dritten Integrals hat nur eine Punktsingularität von weniger starkem Charakter als die Liniensingularität $\frac{1}{\sqrt{x-\xi}}$, so daß der Satz noch aufrecht bleibt, wenn wir den Exponentialfaktor durch 1 ersetzen. Wir werden den Beweis nur im zweiten Fall ausführen, wo die Beschaffenheit des Exponentialfaktors berücksichtigt werden muß. Zum Beweise wird gezeigt, daß das Doppelintegral und das doppelte Integral selbst dann konvergieren, wenn wir den Integranden durch seinen absoluten Wert ersetzen; die weiteren, fast selbstverständlichen¹⁾ Ueberlegungen, die die Gleichheit der beiden Integrale bestätigen, lassen wir weg.

Den Integranden nennen wir immer zur Abkürzung F :

$$F = \frac{\partial t(\xi\eta, xy)}{\partial \xi} \varphi(xy);$$

es sei für alle in Betracht kommenden Werte der Variablen

$$|\varphi(xy)| < m, \quad \chi_1(x) > \mu_1, \quad \chi_2(x) < \mu_2;$$

ferner setzen wir

$$|\log\{4(x-\xi) + (\mu_1 - \eta)^2\}| < C, \quad |\log\{4(x-\xi) + (\mu_2 - \eta)^2\}| < C,$$

für alle $(\xi\eta)$ in Ω ; das ist sicher möglich, denn die Argumente der Logarithmen können nur dann Null werden, wenn $x = \xi$, $\eta = \mu_1$ resp. μ_2 , was für Punkte von Ω ausgeschlossen ist. Schließlich nehmen wir irgend eine Konstante λ , die zwischen 0 und $1/2$ liegt, und schreiben

$$|(x-\xi)^\lambda \log(x-\xi)| < c, \quad (x-\xi)^\lambda < c,$$

was wieder möglich ist wegen der Stetigkeit der genannten Funktionen für alle x, ξ .

¹⁾ Vgl. auch de la Vallée-Poussin, Cours d'Analyse Infinitésimale, Bd. 2, No. 76, 77.

Für die Konvergenzschwierigkeiten kommt nur die Nachbarschaft der Geraden $x = \xi$ in Betracht; es genügt daher zu beweisen, daß die Integrale

$$\iint_{\xi \Omega_{\xi+\delta}} |F| dr, \quad \int_{\xi}^{\xi+\delta} \int_{\chi_1(x)}^{\chi_2(x)} |F| dy dx$$

konvergieren, d. h. daß die Größe

$$I(\delta_1) = \iint_{\xi+\delta_1 \Omega_{\xi+\delta}} |F| dR = \int_{\xi+\delta_1}^{\xi+\delta} \int_{\chi_1(x)}^{\chi_2(x)} |F| dy dx$$

einen Grenzwert besitzt bei Annäherung von δ_1 , an den Wert Null, oder (da der Integrand positiv ist) sogar nur, daß sie bei diesem Grenzübergang endlich bleibt. Da

$$e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4(x-\xi)}} = \frac{1}{e^{\frac{(y-\eta)^2}{4(x-\xi)}}} \leq \frac{1}{1 + \frac{(y-\eta)^2}{4(x-\xi)}} = \frac{4(x-\eta)}{4(x-\eta) + (y-\eta)^2},$$

so ist

$$\left| \frac{\partial t(\xi\eta, xy)}{\partial \xi} \right| \leq \frac{2|y-\eta|}{\sqrt{x-\xi}\{4(x-\xi) + (y-\eta)^2\}},$$

und

$$|F| = \left| \frac{\partial t(\xi\eta, xy)}{\partial \xi} \varphi(xy) \right| \leq \frac{2m|y-\eta|}{\sqrt{x-\xi}\{4(x-\xi) + (y-\eta)^2\}}.$$

Da $(\xi\eta)$ ein Punkt von Ω ist, so ist $\chi_1(\xi) \leq \eta \leq \chi_2(\xi)$; wir wählen δ so klein, daß

$$\chi_1(x) \leq \eta \leq \chi_2(x),$$

wenn

$$\xi \leq x \leq \xi + \delta.$$

Wir haben dann

$$\begin{aligned} I(\delta_1) &\leq \int_{\xi+\delta_1}^{\xi+\delta} \int_{\chi_1(x)}^{\chi_2(x)} \frac{2m|y-\eta|}{\sqrt{x-\xi}\{4(x-\xi) + (y-\eta)^2\}} dy dx \\ &\leq \int_{\xi+\delta_1}^{\xi+\delta} \frac{2m}{\sqrt{x-\xi}} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{|y-\eta|}{4(x-\xi) + (y-\eta)^2} dy dx \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}
 \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{|y - \eta| dy}{4(x - \xi) + (y - \eta)^2} &= \int_{\mu_1}^{\eta} \frac{(\eta - y) dy}{4(x - \xi) + (y - \eta)^2} + \int_{\eta}^{\mu_2} \frac{(y - \eta) dy}{4(x - \xi) + (y - \eta)^2} \\
 &= - \left[\frac{1}{2} \log \{4(x - \xi) + (y - \eta)^2\} \right]_{\mu_1}^{\eta} + \frac{1}{2} \left[\log \{4(x - \xi) + (y - \eta)^2\} \right]_{\eta}^{\mu_2} \\
 &= \frac{1}{2} \log \{4(x - \xi) + (\mu_1 - \eta)^2\} + \frac{1}{2} \log \{4(x - \xi) + (\mu_2 - \eta)^2\} - \log \{4(x - \xi)\} \\
 &\leq \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} C + \log 4 + |\log(x - \xi)| \\
 &\leq \frac{C + \log 4 + 1}{(x - \xi)^\lambda} c.
 \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
 I(\delta_1) &\leq 2m(C + \log 4 + 1) c \int_{\xi + \delta_1}^{\xi + \delta} \frac{dx}{(x - \xi)^{1/2 + \lambda}} \\
 &= 2m(C + \log 4 + 1) c \left[\frac{(x - \xi)^{1/2 - \lambda}}{1/2 - \lambda} \right]_{\xi + \delta_1}^{\xi + \delta} \\
 &= \frac{2m(C + \log 4 + 1) c}{1/2 - \lambda} \left[\delta^{1/2 - \lambda} - \delta_1^{1/2 - \lambda} \right].
 \end{aligned}$$

Wir sehen also, daß $I(\delta_1)$ beim Grenzübergang $\delta_1 = 0$ endlich bleibt; und zwar ist

$$\int_{\delta_1=0} I(\delta_1) \leq k\delta^\nu,$$

wo k, ν von ξ, η, δ unabhängige positive Konstante sind, und $\nu < 1$.

Aus dieser Abschätzung wollen wir den zweiten Teil des Satzes beweisen, welcher behauptet, die durch das Integral definierte Funktion sei stetig. Nennen wir

$$\Phi(\xi\eta) = \iint_{\xi\Omega_b} F dR,$$

so wollen wir zeigen, daß sich zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta > 0$ wählen läßt, daß

$$|\Phi(\bar{\xi}\bar{\eta}) - \Phi(\xi\eta)| < \varepsilon,$$

wenn

$$|\bar{\xi} - \xi| < \delta, \quad |\bar{\eta} - \eta| < \delta.$$

Schreiben wir:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2,$$

wo

$$\Phi_1(\xi\eta) = \iint_{\xi\Omega_{\xi+\delta}} F dR; \quad \Phi_2(\xi\eta) = \iint_{\xi+\delta\Omega_b} F dR,$$

so ist für jede Wahl von δ Φ_2 stetig. Wählen wir δ so klein, daß

$$\delta < \left(\frac{\varepsilon}{4k}\right)^{\frac{1}{\nu}},$$

und daß außerdem die Bedingung des vorhergehenden Beweises:

$$\chi_1(x) \leq \eta \leq \chi_2(x),$$

wenn

$$\xi \leq x \leq \xi + \delta,$$

erfüllt ist.

Wir haben dann:

$$|\Phi_1(\xi\eta)| \leq \iint_{\xi\Omega_{\xi+\delta}} |F| dR \leq k\delta^\nu \leq \frac{\varepsilon}{4};$$

und (da k, ν von ξ, η) unabhängig sind)

$$|\Phi_1(\bar{\xi}\bar{\eta})| \leq \frac{\varepsilon}{4};$$

also

$$|\Phi_1(\bar{\xi}\bar{\eta})| - |\Phi_1(\xi\eta)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Durch Wahl eines eventuell kleinen δ erreichen wir, daß

$$|\Phi_2(\bar{\xi}\bar{\eta}) - \Phi_2(\xi\eta)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

wenn

$$|\bar{\xi} - \xi| < \delta, \quad |\bar{\eta} - \eta| < \delta;$$

dann ist

$$|\Phi(\bar{\xi}\bar{\eta}) - \Phi(\xi\eta)| < \varepsilon,$$

was zu beweisen war.

IIIb. Ist $\varphi(xy)$ eine stetige Funktion, so gelten die Differentiationsformeln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \iint_{\xi \Omega_b} t(\xi \eta, xy) \varphi(xy) dR &= \iint_{\xi \Omega_b} \frac{\partial t(\xi \eta, xy)}{\partial \xi} \varphi(xy) dR + \sqrt{\pi} \int_{\chi_1(\xi)}^{\eta} \varphi(\xi y) dy - \sqrt{\pi} \int_{\eta}^{\chi_2(\xi)} \varphi(\xi y) dy \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \iint_{\xi \Omega_b} t(\xi \eta, xy) \varphi(xy) dR &= \iint_{\xi \Omega_b} \frac{\partial t(\xi \eta, xy)}{\partial \eta} \varphi(xy) dR \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \iint_{\xi \Omega_b} t(\xi \eta, xy) \varphi(xy) dR &= - \iint_{\xi \Omega_b} \frac{\partial^2 t(\xi \eta, xy)}{\partial \xi^2} \varphi(xy) dR. \end{aligned}$$

Wir geben den Beweis nur in dem ersten Fall an. Nennen wir

$$\Phi(\xi \eta) = \iint_{\xi \Omega_b} t(\xi \eta, xy) \varphi(xy) dR, \quad \Phi(\bar{\xi} \eta) = \iint_{\bar{\xi} \Omega_b} t(\bar{\xi} \eta, xy) \varphi(xy) dR,$$

und nehmen $\bar{\xi} > \xi$, was für den Beweis keine wirkliche Einschränkung bedeutet, so haben wir

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{\xi} \eta) - \Phi(\xi \eta) &= \iint_{\bar{\xi} \Omega_b} t(\bar{\xi} \eta, xy) \varphi(xy) dR - \iint_{\xi \Omega_b} t(\xi \eta, xy) \varphi(xy) dR \\ &= \iint_{\xi \Omega_{\bar{\xi}}} t(\xi \eta, xy) \varphi(xy) dR + \iint_{\bar{\xi} \Omega_b} \{t(\bar{\xi} \eta, xy) - t(\xi \eta, xy)\} \varphi(xy) dR \\ &= -(\bar{\xi} - \xi) \int_{\chi_1(\xi^*)}^{\chi_2(\xi^*)} t(\xi \eta, \xi^* y) \varphi(\xi^* y) dy + (\bar{\xi} - \xi) \iint_{\bar{\xi} \Omega_b} \frac{\partial t(\xi_1^* \eta, xy)}{\partial \xi_1^*} \varphi(xy) dR, \end{aligned}$$

wo ξ^* , ξ_1^* gewisse, zwischen ξ und $\bar{\xi}$ liegende Größen bedeuten.

$$\frac{\Phi(\bar{\xi} \eta) - \Phi(\xi \eta)}{\bar{\xi} - \xi} = - \int_{\chi_1(\xi^*)}^{\chi_2(\xi^*)} t(\xi \eta, \xi^* y) \varphi(\xi^* y) dy + \iint_{\bar{\xi} \Omega_b} \frac{\partial t(\xi_1^* \eta, xy)}{\partial \xi_1^*} \varphi(xy) dR.$$

Das Flächenintegral läßt sich in die zwei Teile:

$$\iint_{\bar{\xi} \Omega_{\xi^*}} \frac{\partial t(\xi_1^* \eta, xy)}{\partial \xi_1^*} \varphi(xy) dR + \iint_{\xi^* \Omega_b} \frac{\partial t(\xi_1^* \eta, xy)}{\partial \xi_1^*} \varphi(xy) dR$$

spalten; der erste Teil nimmt beim Grenzübergang $\bar{\xi} = \xi$ den Wert Null an, denn nach IIIa bleibt er absolut kleiner als $k|\xi^* - \bar{\xi}|^\nu$; der zweite Teil ist nach IIIa eine stetige Funktion und hat daher den Grenzwert

$$\iint_{\xi\Omega_b} \frac{\partial t(\xi\eta, xy)}{\partial \xi} \varphi(xy) dR.$$

Das Linienintegral ist ein eigentliches Integral; führen wir daher den Grenzübergang auf rein formale Weise aus, so bekommen wir unter Berücksichtigung der Definition von $t(\xi\eta, xy)$ in I den Grenzwert

$$\int_{\chi_1(\xi)}^{\chi_2(\xi)} t(\xi\eta, \xi y) \varphi(\xi y) dy = -\sqrt{\pi} \int_{\chi_1(\xi)}^{\eta} \varphi(\xi y) dy + \sqrt{\pi} \int_{\eta}^{\chi_2(\xi)} \varphi(\xi y) dy.$$

Hiermit ist unsere Formel bewiesen.

IVa. Es existiert eine und nur eine stetige, nach y stetig differenzierbare, im Innern von Ω beliebig oft stetig differenzierbare Lösung $u(xy)$ der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

welche auf der Geraden $x = a$ die Werte $f_0(y)$ annimmt und auf der Kurve S_i einer der Bedingungen

- 1) $u(x\chi_i) = f_i(x)$
- 2) $\frac{\partial u(x\chi_i)}{\partial y} + \alpha_i(x) u(x\chi_i) = f_i(x)$

genügt, wo $\alpha_i(x)$, $f_i(x)$, $f_0(y)$ stetig differenzierbare, die Relationen

$$1) \quad f(a) = f_0(\chi_i(a))$$

resp.

$$2) \quad f_i(a) = f_0'(\chi_i(a)) + \alpha_i(a) f_0(\chi_i(a))$$

erfüllende Funktionen sind.

Wir haben hier zur Abkürzung

$$\frac{df_0(y)}{dy} = f_0'(y)$$

gesetzt. Die angegebenen Relationen drücken nur die Bedingung aus, daß die vorgeschriebenen Werte auch in den Eckpunkten $(a\chi_1)$, $(a\chi_2)$ stetig sind. Der Satz ist von Holmgren¹⁾ bewiesen worden. Durch ähnliche Methoden oder durch Einsetzen von $-x$ an Stelle von x bekommen wir den entsprechenden Satz für die adjungierte Gleichung:

IVb. Es existiert eine und nur eine stetige, nach y stetig differenzierbare, im Innern von Ω beliebig oft stetig differenzierbare Lösung $u(xy)$ der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

welche auf der Geraden $x = b$ die Werte $f_0(y)$ annimmt und auf der Kurve S_i einer der Bedingungen

- 1) $u(x\chi_i) = f_i(x)$
- 2) $\frac{\partial u(x\chi_i)}{\partial y} + \alpha_i(x) u(x\chi_i) = f_i(x)$

genügt, wo $\alpha_i(x)$, $f_i(x)$, $f_0(y)$ stetig differenzierbare, die Relationen

$$1) \quad f_i(b) = f_0(\chi_i(b))$$

resp.

$$2) \quad f_i(b) = f'_0(\chi_i(b)) + \alpha_i(b) f_0(\chi_i(b))$$

erfüllende Funktionen sind.

Es wird in der Folge ziemlich unbequem sein, die beiden Arten von Bedingungen 1), 2) gleichzeitig für die beiden Kurven zu behandeln, da für sie verschiedenartige Formeln nachher eintreten. Wir wollen also von jetzt ab alle Sätze für den Fall aussprechen, daß eine Bedingung der Form 1) auf $y = \chi_1(x)$, eine Bedingung der Form 2) auf $y = \chi_2(x)$ herrscht; dabei werden beide Arten Bedingungen berücksichtigt werden, sodaß das Verhalten im allgemeinen Fall vollständig klar angedeutet wird.

V. Es sei $(\xi\eta)$ ein fester Punkt von Ω . Suchen wir diejenige (nach IVa existierende) Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

¹⁾ Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Bd. 3 (1906), No. 12, S. 1–4; Bd. 4 (1908), No. 14, S. 6–8.

welche auf der Geraden $x = \xi$ verschwindet und ferner den Bedingungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x\chi_1) = -\frac{\partial t(\xi\eta, x\chi_1)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x\chi_2)}{\partial y} + \beta(x) u(x\chi_2) = -\frac{\partial t(\xi\eta, x\chi_2)}{\partial x} - \beta(x) \frac{\partial t(\xi\eta, x\chi_2)}{\partial y} \end{array} \right.$$

genügt. Diese Funktion bezeichnen wir mit $g(\xi\eta, xy)$ und nennen

$$G(\xi\eta, xy) = \frac{\partial t(\xi\eta, xy)}{\partial y} + g(\xi\eta, xy)$$

eine Greensche Funktion der Differentialgleichung. Sie erfüllt die Randbedingungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} G(\xi\eta, \xi y) = 0 \quad [y \neq \eta] \\ G(\xi\eta, x\chi_1) = 0 \\ \frac{\partial G(\xi\eta, x\chi_2)}{\partial y} + \beta(x) G(\xi\eta, x\chi_2) = 0. \end{array} \right.$$

Auf ähnliche Weise konstruieren wir eine Lösung

$$H(\xi\eta, xy) = -\frac{\partial t(xy, \xi\eta)}{\partial y} + h(\xi\eta, xy)$$

der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

welche die Bedingungen

$$\left\{ \begin{array}{l} H(\xi\eta, \xi y) = 0 \quad [y \neq \eta] \\ H(\xi\eta, x\chi_1) = 0 \\ \frac{\partial H(\xi\eta, x\chi_2)}{\partial y} + \alpha(x) H(\xi\eta, x\chi_2) = 0 \end{array} \right.$$

erfüllt. $G(\xi\eta, xy)$ ist nur für $x \geq \xi$, $H(\xi\eta, xy)$ nur für $x \leq \xi$ definiert.

Wir sagen, G und H erfüllen adjungierte Randbedingungen¹⁾, wenn

$$\beta(x) - \alpha(x) = \frac{d\chi_2(x)}{dx} \quad 2).$$

¹⁾ Die Bezeichnungsweise "adjungierte Bedingungen" rührt im Falle von nicht selbst adjungierten gewöhnlichen Differentialgleichungen von Birkhoff her, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. 10 (1909), S. 373, 375.

²⁾ Ist eine der Funktionen $\alpha(x)$, $\beta(x)$ stetig differenzierbar angenommen, so gilt dasselbe für die andre wegen der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit von $\chi_2(x)$.

Wir werden jetzt den Satz beweisen:

Erfüllen $G(\xi\eta, xy)$, $H(\xi\eta, xy)$ adjungierte Randbedingungen, so sind sie gegenseitig symmetrisch:

$$G(\xi\eta, xy) = H(xy, \xi\eta).$$

Wir nehmen die Funktionen für zwei verschiedene Punkte $G(\xi_1\eta_1, xy)$, $H(\xi_2\eta_2, xy)$, wobei $\xi_2 > \xi_1$. Es gilt die Identität:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ G \frac{\partial H}{\partial y} - H \frac{\partial G}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \{GH\} = G \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial H}{\partial x} \right\} - H \left\{ \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - \frac{\partial G}{\partial x} \right\} = 0.$$

Integrieren wir über das Gebiet $\bar{\xi}_1 \Omega_{\bar{\xi}_2}$, wo $\bar{\xi}_1$ ein wenig größer als ξ_1 , $\bar{\xi}_2$ ein wenig kleiner als ξ_2 ist. Umformung mittels des Greenschen Satzes liefert die Formel:

$$\begin{aligned} & \int_{\chi_1(\bar{\xi}_2)}^{\chi_2(\bar{\xi}_2)} G(\xi_1\eta_1, \bar{\xi}_2 y) H(\xi_2\eta_2, \bar{\xi}_2 y) dy - \int_{\bar{\xi}_1}^{\bar{\xi}_2} \left[GH dy - \left\{ G \frac{\partial H}{\partial y} - H \frac{\partial G}{\partial y} \right\} dx \right]_{S_2} \\ & - \int_{\chi_1(\bar{\xi}_1)}^{\chi_2(\bar{\xi}_1)} G(\xi_1\eta_1, \bar{\xi}_1 y) H(\xi_2\eta_2, \bar{\xi}_1 y) dy + \int_{\bar{\xi}_1}^{\bar{\xi}_2} \left[GH dy - \left\{ G \frac{\partial H}{\partial y} - H \frac{\partial G}{\partial y} \right\} dx \right]_{S_1} = 0. \end{aligned}$$

Das dritte und das vierte Integral verschwinden; denn auf S_1 ist $G = H = 0$, und auf S_2 ist

$$GH \frac{dy}{dx} - \left\{ G \frac{\partial H}{\partial y} - H \frac{\partial G}{\partial y} \right\} = GH \frac{d\chi_2}{\partial x} + GH\alpha - GH\beta = 0.$$

Wir haben also einfach

$$\int_{\chi_1(\bar{\xi}_2)}^{\chi_2(\bar{\xi}_2)} G(\xi_1\eta_1, \bar{\xi}_2 y) H(\xi_2\eta_2, \bar{\xi}_2 y) dy = \int_{\chi_1(\bar{\xi}_1)}^{\chi_2(\bar{\xi}_1)} G(\xi_1\eta_1, \bar{\xi}_1 y) H(\xi_2\eta_2, \bar{\xi}_1 y) dy.$$

Die linke Seite dieser Identität läßt sich in der Form

$$\int_{\chi_1(\bar{\xi}_2)}^{\chi_2(\bar{\xi}_2)} G(\xi_1\eta_1, \bar{\xi}_2 y) h(\xi_2\eta_2, \bar{\xi}_2 y) dy - \int_{\chi_1(\bar{\xi}_2)}^{\chi_2(\bar{\xi}_2)} G(\xi_1\eta_1, \bar{\xi}_2 y) \frac{\partial t(\bar{\xi}_2 y, \xi_2\eta_2)}{\partial y} dy$$

schreiben; die Funktion $G(\xi_1\eta_1, \bar{\xi}_2 y)$ bleibt beim Grenzübergang $\bar{\xi}_2 = \xi_2$ stetig; dasselbe gilt für $h(\xi_2\eta_2, \bar{\xi}_2 y)$, welches den Wert Null annimmt; also verschwindet in der Grenze das erste der beiden Teilintegrale. Der Grenzwert des zweiten läßt sich nach IIa auswerten und ist gleich $2\sqrt{\pi} G(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)$.

Ganz ebenso bekommen wir als Grenzwert der rechten Seite $2\sqrt{\pi} H(\xi_2\eta_2, \xi_1\eta_1)$. Diese beiden Größen sind also einander gleich, was zu beweisen war.

Wir werden hernach unter G immer diejenige Greensche Funktion verstehen, für welche

$$\beta(x) = \alpha(x) + \frac{d\chi_2(x)}{dx}$$

bei gegebenen $\alpha(x)$.

VI. Sind u, v solche stetige Funktionen mit den im Innern von Ω stetigen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$, daß die Differentialgleichungen

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \varphi(xy) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = v \end{cases}$$

und die Randbedingungen

$$\begin{cases} u(by) = f_0(y) \\ u(x\chi_1) = f_1(x) \\ v(x\chi_2) + \alpha(x)u(x\chi_2) = f_2(x) \end{cases}$$

erfüllt sind, wo $f_0(y), f_1(x), f_2(x), \alpha(x)$ stetige Funktionen sind, für welche

$$\begin{cases} f_1(b) = f_0(\chi_1(b)) \\ f_2(b) = f_0'(\chi_2(b)) + \alpha(b)f_0(\chi_2(b)), \end{cases}$$

so sind u, v durch die Formeln

$$\begin{cases} u(\xi\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\chi_1(b)}^{\chi_2(b)} G(\xi\eta, by) f_0(y) dy + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^b \frac{\partial G(\xi\eta, x\chi_1)}{\partial y} f_1(x) dx \\ \quad + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^b G(\xi\eta, x\chi_2) f_2(x) dx - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{\xi\Omega_b} G(\xi\eta, xy) \varphi(xy) dR \\ v(\xi\eta) = \frac{\partial u(\xi\eta)}{\partial \eta} \end{cases}$$

gegeben.

Zum Beweise schreiben wir die Identität

$$G\varphi = G \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial G}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - v \right) - u \left(\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - \frac{\partial G}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \{Gu\} + \frac{\partial u}{\partial y} \left\{ Gv - \frac{\partial G}{\partial y} u \right\},$$

stetig; ferner besitzen sie im Innern von Ω die stetigen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$, $\frac{\partial v}{\partial \eta}$ und erfüllen die Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = v \end{cases}$$

und die Randbedingungen

$$\begin{cases} u(b\eta) = f_0(\eta) \\ u(\xi\chi_1) = f_1(\xi) \\ v(\xi\chi_2) + \alpha(\xi) u(\xi\chi_2) = f_2(\xi). \end{cases}$$

Wenn Funktionen u , v von der genannten Beschaffenheit existieren, so müssen sie nach VI (jetzt in dem Fall angewandt, daß $\varphi(xy) = 0$) durch die gegebenen Formeln dargestellt werden. Es genügt also, zu zeigen, daß solche Funktionen u existieren. Aber es existiert sicher nach IVb eine Funktion $u(\xi\eta)$, welche folgende Eigenschaften besitzt: u , $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ sind stetig; $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$, $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ sind im Innern von Ω stetig, und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0;$$

schließlich

$$u(b\eta) = f_0(\eta); u(\xi\chi_1) = f_1(\xi); \frac{\partial u(\xi\chi_2)}{\partial \eta} + \alpha(\xi) u(\xi\chi_2) = f_2(\xi).$$

Nennen wir $\frac{\partial u(\xi\eta)}{\partial \eta} = v(\xi\eta)$, so übertragen sich diese Eigenschaften genau auf die Eigenschaften für u , v in unserm Satze.

VIIIb. Ist $\varphi(xy)$ eine stetige, nach y stetig differenzierbare Funktion, so sind die Funktionen

$$\begin{cases} u(\xi\eta) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{\xi\Omega_b} G(\xi\eta, xy) \varphi(xy) dR \\ v(\xi\eta) = \frac{\partial u(\xi\eta)}{\partial \eta} \end{cases}$$

stetig; ferner besitzen sie im Innern von Ω die stetigen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$, $\frac{\partial v}{\partial \eta}$ und erfüllen die Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = \varphi(\xi\eta) \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = v \end{cases}$$

und die Randbedingungen:

$$\begin{cases} u(b\eta) = 0 \\ u(\xi\chi_1) = 0 \\ v(\xi\chi_2) + \alpha(\xi) u(\xi\chi_2) = 0. \end{cases}$$

Schreiben wir

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2,$$

wo

$$\begin{aligned} u_1(\xi\eta) &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{\xi\Omega_b} g(\xi\eta, xy) \varphi(xy) dR, & v_1(\xi\eta) &= \frac{\partial u_1(\xi\eta)}{\partial \eta}, \\ u_2(\xi\eta) &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{\xi\Omega_b} \frac{\partial t(\xi\eta, xy)}{\partial y} \varphi(xy) dR, & v_2(\xi\eta) &= \frac{\partial u_2(\xi\eta)}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

so sind alle die genannten Stetigkeitseigenschaften für u , v von vornherein für u_1 , v_1 erfüllt; daher bleibt in dieser Beziehung nur die Untersuchung für u_2 , v_2 nötig. Bedienen wir uns für u_2 der teilweisen Integration, so wird

$$\begin{aligned} u_2(\xi\eta) &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^b t(\xi\eta, x\chi_2) \varphi(x\chi_2) dx + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^b t(\xi\eta, x\chi_1) \varphi(x\chi_1) dx \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{\xi\Omega_b} t(\xi\eta, xy) \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial y} dR. \end{aligned}$$

Hieraus folgen alle gewünschten Stetigkeitseigenschaften mit Hilfe von IIa, IIb, IIIa und IIIb. Ferner sind die so erhaltenen Formeln für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_2(\xi\eta)}{\partial \xi} &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^b \frac{\partial t(\xi\eta, x\chi_2)}{\partial \xi} \varphi(x\chi_2) dx + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t(\xi\eta, \xi\chi_2) \varphi(\xi\chi_2) \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^b \frac{\partial t(\xi\eta, x\chi_1)}{\partial \xi} \varphi(x\chi_1) dx - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t(\xi\eta, \xi\chi_1) \varphi(\xi\chi_1) \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{\xi\Omega_b} \frac{\partial t(\xi\eta, xy)}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial y} dR + \frac{1}{2} \int_{\chi_1(\xi)}^{\eta} \frac{\partial \varphi(\xi y)}{\partial y} dy - \frac{1}{2} \int_{\eta}^{\chi_2(\xi)} \frac{\partial \varphi(\xi y)}{\partial y} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^b \frac{\partial t(\xi\eta, x\chi_2)}{\partial \xi} \varphi(x\chi_2) dx + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^b \frac{\partial t(\xi\eta, x\chi_1)}{\partial \xi} \varphi(x\chi_1) dx \\
 &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{\xi\Omega_b} \frac{\partial t(\xi\eta, xy)}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial y} dR + \varphi(\xi\eta),
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_2(\xi\eta)}{\partial \eta} = v_2(\xi\eta) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^b \frac{\partial t(\xi\eta, x\chi_2)}{\partial \eta} \varphi(x\chi_2) dx$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^b \frac{\partial t(\xi\eta, x\chi_1)}{\partial \eta} \varphi(x\chi_1) dx + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{\xi\Omega_b} \frac{\partial t(\xi\eta, xy)}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial y} dR,$$

$$\frac{\partial v_2(\xi\eta)}{\partial \eta} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^b \frac{\partial^2 t(\xi\eta, x\chi_2)}{\partial \eta^2} \varphi(x\chi_2) dx + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^b \frac{\partial^2 t(\xi\eta, x\chi_1)}{\partial \eta^2} \varphi(x\chi_1) dx$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{\xi\Omega_b} \frac{\partial^2 t(\xi\eta, xy)}{\partial \eta^2} \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial y} dR$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^b \frac{\partial t(\xi\eta, x\chi_2)}{\partial \xi} \varphi(x\chi_2) dx - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^b \frac{\partial t(\xi\eta, x\chi_1)}{\partial \xi} \varphi(x\chi_1) dx$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{\xi\Omega_b} \frac{\partial t(\xi\eta, xy)}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial y} dR.$$

Es erfüllen $u_2 v_2$ also die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2}{\partial \eta} &= \varphi(\xi\eta) \\
 \frac{\partial u_2}{\partial \eta} &= v_2.
 \end{aligned}$$

Es ist $g(\xi\eta, xy)$ nicht nur eine Lösung von

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

(nach Definition), sondern auch (nach dem Symmetriegesetz in V) eine Lösung von

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} + \frac{\partial g}{\partial \xi} = 0.$$

Darum ist, wie leicht einzusehen,

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} = 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = v_1, \end{cases}$$

also schließlich

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = v. \end{cases}$$

Es bleiben nur noch die Randbedingungen zu bestätigen. Das geschieht auch durch Benutzung des Symmetriegesetzes; denn demzufolge ist

$$\begin{aligned} G(\xi\chi_1, xy) &= H(xy, \xi\chi_1) = 0 \\ \frac{\partial G(\xi\chi_2, xy)}{\partial \eta} + a(\xi)G(\xi\chi_2, xy) &= \frac{\partial H(xy, \xi\chi_2)}{\partial \eta} + a(\xi)H(xy, \xi\chi_2) = 0; \end{aligned}$$

hieraus und aus den Stetigkeitseigenschaften folgen unmittelbar die beiden letzten Randbedingungen für u , v . Um zu sehen, daß auch $u(b\eta) = 0$, bemerken wir, daß sicher $u_1(b\eta) = 0$, da der Integrand stetig ist und der Integrationsbereich verschwindet; andererseits ist aber auch $u_2(b\eta) = 0$, denn

$$\begin{aligned} |u_2(\xi\eta)| &\leq \iint_{\xi\Omega_b} \frac{\partial t(\xi\eta, xy)}{\partial y} |\varphi(xy)| dR \leq \int_{\xi}^b m(\mu_2 - \mu_1) - \frac{dx}{\sqrt{x - \xi}} \\ &= 2m(\mu_2 - \mu_1)(b - \xi)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

was beim Grenzübergang $\xi = b$ den Wert Null annimmt.

§ 7. Lösung der Randwertaufgabe für das parabolische System.

Wir werden hier ein gewöhnlich-parabolisches System von Gleichungen in der Normalform betrachten und ein Funktionenpaar finden, welches dem Gleichungssystem und gewissen linearen Randbedingungen genügt. Wir beschränken uns zunächst, wie bei dem hyperbolischen Fall, auf ein ganz spezielles System und verallgemeinern nachher die Resultate. Ferner werden wir die in § 6 (vor V) erwähnte vereinfachte Form der Randbedingungen in unsern Sätzen angeben, was keine wirkliche Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet; übrigens werden die schließlich herauskommenden Resultate ganz allgemein ausgesprochen.

I. Es möge wie vorhin mit Ω ein Gebiet bezeichnet werden, welches durch die Ordinaten $x = a$, $x = b$ ($b > a$) und die Kurven $S_1 : y = \chi_1(x)$, $S_2 : y = \chi_2(x)$ begrenzt ist, wo $\chi_1(x)$, $\chi_2(x)$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen in der Strecke $a \leq x \leq b$ sind, und $\chi_2(x) > \chi_1(x)$. Wir suchen ein Funktionenpaar $u(xy)$, $v(xy)$, das dem Differentialgleichungssystem

$$1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = A(xy) u \\ \frac{\partial u}{\partial y} = v \end{cases}$$

genügt und die Randbedingungen

$$2) \quad \begin{cases} u(by) = f_0(y) \\ u(x\chi_1) = f_1(x) \\ v(x\chi_2) + \alpha(x) u(x\chi_2) = f_2(x) \end{cases}$$

erfüllt. Dabei soll $A(xy)$ eine stetige, nach y stetig differenzierbare Funktion sein; $f_0(y)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\alpha(x)$ sollen stetig differenzierbar sein und unter sich die Relationen

$$3) \quad \begin{aligned} f_1(b) &= f_0(\chi_1(b)) \\ f_2(b) &= f_0'(\chi_2(b)) + \alpha(b) f_0(\chi_2(b)) \end{aligned}$$

befriedigen. Von den gesuchten Funktionen $u(xy)$, $v(xy)$ verlangen wir, daß sie stetig seien und im Innern von Ω die stetigen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ besitzen; aus diesen Annahmen folgt, daß $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ auch am Rande stetig sind.

Nach § 6, VI müssen die Funktionen u , v durch folgende Formeln gegeben werden:

$$4) \quad \begin{cases} u(\xi\eta) = u(\xi\eta) + \iint_{\xi\Omega_b} K(\xi\eta, xy) u(xy) dR \\ v(\xi\eta) = \frac{\partial u(\xi\eta)}{\partial \eta}, \end{cases}$$

wobei

$$5) \quad \begin{cases} 2\sqrt{\pi}u(\xi\eta) = \int_{\chi_1(b)}^{\chi_2(b)} G(\xi\eta, by) f_0(y) dy + \int_{\xi}^b \frac{\partial G(\xi\eta, x\chi_1)}{\partial y} f_1(x) dx + \int_{\xi}^b G(\xi\eta, x\chi_2) f_2(x) dx \\ 2\sqrt{\pi}K(\xi\eta, xy) = -G(\xi\eta, xy) A(xy). \end{cases}$$

Aber nach § 6, VIIa, VIIb müssen Funktionen u, v , die die Gleichungen 4) erfüllen, auch die Gleichungen 1) und die Randbedingungen 2) erfüllen; vorausgesetzt nur, daß die Funktion $\varphi(xy)$ von § 6, VIIb stetig, nach y stetig differenzierbar ist; diese Funktion ist hier durch $A(xy) u(xy)$ vertreten. Wir brauchen also nur, außer Stetigkeit, die stetige Differenzierbarkeit von $u(\xi\eta)$ nach η nachzuweisen. Das geschieht aber ohne weiteres aus der ersten Gleichung 9); denn schon nach § 6, VIIa ist $u(\xi\eta)$ nach η stetig differenzierbar, und dieselbe Eigenschaft besitzt nach Definition von G und § 6, IIIa, IIIb das Integral über ${}_{\xi}\Omega_b$. Wir haben also den Satz:

Sind u, v stetige Funktionen, die im Innern von Ω die stetigen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ besitzen und die dem Differentialgleichungssystem 1) nebst den Randbedingungen 2) genügen, so erfüllen u, v die Relationen 4); umgekehrt, erfüllen u, v die Relationen 4) und ist u stetig, so ist auch v stetig, und $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ sind im Innern von Ω stetig; und u, v genügen dem Differentialgleichungssystem 1) nebst den Randbedingungen 2).

II. Es kommt also wesentlich darauf an, eine stetige Lösung u der Integralgleichung

$$4') \quad u(\xi\eta) = u(\xi\eta) + \iint_{{}_{\xi}\Omega_b} K(\xi\eta, xy) u(xy) dR$$

zu finden. Diese Integralgleichung ist zunächst nicht in der von Fredholm betrachteten Form; denn der Integrationsbereich ${}_{\xi}\Omega_b$ hängt von dem Parameter ξ ab. Es ist aber $K(\xi\eta, xy)$ nur für $x \geq \xi$ definiert; ergänzen wir die Definition einfach durch die Annahme

$$6) \quad K(\xi\eta, xy) = 0 \quad \text{für } a \leq x \leq \xi$$

so läßt sich 4') auch folgendermaßen schreiben:

$$4') \quad u(\xi\eta) = u(\xi\eta) + \iint K(\xi\eta, xy) u(xy) dR$$

und ist jetzt genau eine Fredholmsche Integralgleichung.

Wenn der Kern stetig wäre, so dürften wir schließen, daß die Gleichung 4') sicher eine stetige Lösung besitzt, wenn die entsprechende homogene Integralgleichung:

$$4'_0) \quad u_0(\xi\eta) = \iint K(\xi\eta, xy) u_0(xy) dR$$

keine von Null verschiedene stetige Lösung besitzt. Im Falle einer Singularität bei $(xy) = (\xi\eta)$ dürfen wir doch denselben Schluß ziehen, wenn es eine positive Konstante $\alpha < \frac{1}{2}$ gibt, für welche $|x - \xi|^{\alpha} |y - \eta|^{\alpha} |K(\xi\eta, xy)|$ endlich bleibt. Wir werden zeigen, daß hier tatsächlich dieser Fall vorhanden ist.

Für $x \geq \xi$ (die einzigen Werte, die besondere Beachtung erfordern) ist die Singularität von $K(\xi\eta, xy)$ durch

$$\frac{\partial t(\xi\eta, xy)}{\partial y} = \frac{e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4(x-\xi)}}}{\sqrt{x-\xi}}$$

charakterisiert, sodaß wir schreiben können

$$|K(\xi\eta, xy)| < \frac{k}{\sqrt{x-\xi}} e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4(x-\xi)}},$$

wo k eine Konstante bedeutet. Ohne den Exponentialfaktor in Betracht zu ziehen, ließe sich nur der Wert $\alpha = \frac{1}{2}$ angeben, welcher nicht hinreichend klein ist. Wir haben aber

$$e^{\frac{(y-\eta)^2}{4(x-\xi)}} \geq 1 + \frac{(y-\eta)^2}{4(x-\xi)} \geq 1,$$

also

$$\begin{aligned} \left\{ e^{\frac{(y-\eta)^2}{4(x-\xi)}} \right\}^3 &\geq e^{\frac{(y-\eta)^2}{4(x-\xi)}} \geq 1 + \frac{(y-\eta)^2}{4(x-\xi)} \\ &= \left\{ 1 - \frac{|y-\eta|}{2\sqrt{x-\xi}} \right\}^2 + \frac{|y-\eta|}{\sqrt{x-\xi}} \geq \frac{|y-\eta|}{\sqrt{x-\xi}} \end{aligned}$$

und

$$e^{\frac{(y-\eta)^2}{4(x-\xi)}} \geq |y-\eta|^{\frac{1}{3}}(x-\xi)^{-\frac{1}{3}}.$$

Daher ist ferner

$$e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4(x-\xi)}} \leq (x-\xi)^{\frac{1}{3}}|y-\eta|^{-\frac{1}{3}}$$

und

$$|K(\xi\eta, xy)| < \frac{k}{(x-\xi)^{\frac{1}{2}}}(x-\xi)^{\frac{1}{3}}|y-\eta|^{-\frac{1}{3}} = k(x-\xi)^{-\frac{1}{6}}|y-\eta|^{-\frac{1}{3}}.$$

Es ist also

$$|x-\xi|^{\frac{1}{3}}|y-\eta|^{\frac{1}{3}}|K(\xi\eta, xy)| < k,$$

und $\alpha = \frac{1}{3}$ hat die verlangte Eigenschaft. Wir dürfen also sagen:

Hat $4'_0$ keine von Null verschiedene stetige Lösung, so hat $4'$ eine und nur eine stetige Lösung.

III. Unsere Aufgabe können wir dann als gelöst ansehen, wenn $4'_0$ nur die eine stetige Lösung $x_0 = 0$ besitzt. Das ist aber immer der Fall, wie wir jetzt beweisen wollen.

Die homogene Integralgleichung

$$4'_0) \quad u_0(\xi\eta) = \iint_{\xi\Omega_b} K(\xi\eta, xy)u_0(xy) dR$$

besitzt keine von Null verschiedene stetige Lösung.

1) Der Beweis wird in drei Teilen gegeben. Als ersten Teil beweisen wir: Gibt es eine solche positive Funktion von ξ allein, $m(\xi)$, daß eine stetige Lösung $u_0(\xi\eta)$ von $4'_0$) die Bedingung

$$|u_0(\xi\eta)| < m(\xi)$$

erfüllt, so ist auch

$$|u_0(\xi\eta)| < c \int_{\xi}^b m(x) dx,$$

wo c eine Konstante bedeutet. Um dies zu sehen, schreiben wir $\xi_1(x) > \mu_1$, $\xi_2(x) < \mu_2$, $|K(\xi\eta, xy)| < \frac{k}{\sqrt{x-\xi}}$; wir haben dann

$$|u_0(\xi\eta)| \leq \int_{\xi}^b \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{km(x)}{\sqrt{x-\xi}} dy dx < k(\mu_2 - \mu_1) \int_{\xi}^b \frac{m(x)}{\sqrt{x-\xi}} dx.$$

Wenden wir dieses Verfahren ein zweites Mal an, so finden wir:

$$\begin{aligned} |u_0(\xi\eta)| &\leq k^2(\mu_2 - \mu_1)^2 \int_{\xi}^b \int_s^b \frac{m(x)}{\sqrt{s-\xi}\sqrt{x-s}} dx ds \\ &= k^2(\mu_2 - \mu_1)^2 \int_{\xi}^b \int_{\xi}^x \frac{m(x)}{\sqrt{s-\xi}\sqrt{x-s}} ds dx \quad ^1) \\ &= k^2(\mu_2 - \mu_1)^2 \pi \int_{\xi}^b m(x) dx, \end{aligned}$$

in Uebereinstimmung mit unserer Behauptung.

2) Als zweiten Teil des Beweises zeigen wir: Eine stetige Lösung von $4'_0$) genügt der Bedingung

$$|u_0(\xi\eta)| \leq C \frac{c^n (b-\xi)^n}{n!}$$

für jede positive ganze Zahl n , wo C , c Konstanten bedeuten.

¹⁾ In Bezug auf diese Umkehrung der Integrationsfolge sei auf die vorhin genannte Arbeit des Verfassers verwiesen, *Annals of Mathematics*, Bd. 9 (1908), S. 183–187.

Ist $|u_0(\xi\eta)| \leq C$, so ist auch nach dem vorhergehenden

$$|u_0(\xi\eta)| \leq c \int_{\xi}^b C dx = Cc(b - \xi);$$

daher ist aber wieder

$$|u_0(\xi\eta)| \leq c \int_{\xi}^b Cc(b - x) dx = Cc^2 \frac{(b - \xi)^2}{2};$$

und der Beweis ist im allgemeinen durch vollständige Induktion erbracht.

3) Wir haben nur noch zu bemerken, daß die rechte Seite der Ungleichung

$$|u_0(\xi\eta)| \leq C \frac{c^n (b - \xi)^n}{n!}$$

beim Grenzübergang $n = \infty$ verschwindet. Daher ist

$$u_0(\xi\eta) = 0,$$

was zu beweisen war.

Als Gesamtergebnis haben wir also das

IV. Existenztheorem: Das System 1) nebst den Randbedingungen 2) besitzt ein und nur ein System von Lösungen $u(xy)$, $v(xy)$, wobei u , v stetig, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ im Innern von Ω stetig sein sollen.

Dieselbe Beweismethode liefert ohne Schwierigkeit, wie schon bemerkt, die allgemeinere Form:

Existenztheorem: Das System 1) besitzt ein und nur ein solches System von Lösungen u , v , daß

$$7') \quad u(by) = f_0(y),$$

und daß auf jeder der Kurven S_1 , S_2 eine der Bedingungen

$$7'') \quad \begin{array}{l} 1) \quad u(x\chi_i) = f_i(x) \\ \text{resp.} \quad 2) \quad v(x\chi_i) + \alpha_i(x)u(x\chi_i) = f_i(x) \end{array}$$

erfüllt ist, wobei u , v stetig, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ im Innern von Ω stetig sein sollen.

Hier sind $f_0(y)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ stetig differenzierbare Funktionen, zwischen denen die Relationen:

$$8) \quad \begin{array}{l} 1) \quad f_i(b) = f_0(\chi_i(b)) \\ \text{resp.} \quad 2) \quad f_i(b) = f_0'(\chi_i(b)) + \alpha_i(b)f_0(\chi_i(b)) \end{array}$$

statthaben.

V. Wir wollen jetzt das allgemeinere System

$$9) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = A(xy)u(xy) + B(xy)v(xy) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = C(xy)u(xy) + D(xy)v(xy) \end{cases}$$

betrachten. Wie in § 2, IX angedeutet, wollen wir annehmen, daß D in dem ganzen in Betracht gezogenen Gebiet nirgends verschwindet. Unsere Voraussetzungen sind folgende: die Funktionen

$$\begin{aligned} A; & \quad \frac{\partial A}{\partial y}; \\ B; & \quad \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}; \\ C; & \quad \frac{\partial C}{\partial x}, \quad \frac{\partial C}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}; \\ D; & \quad \frac{\partial D}{\partial x}, \quad \frac{\partial D}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial^3 D}{\partial y^3}; \end{aligned}$$

sollen stetig sein, und $D > 0$. Wir stellen uns die Aufgabe, ein Lösungssystem von 9) mit den Nebenbedingungen 7) zu finden; und zeigen, daß dieses Problem sich durch Transformation auf das frühere reduzieren läßt.

Wir machen zunächst die Transformation der unabhängigen Variablen

$$X = x, \quad Y = \int \sqrt{D} \, dy \quad ^1).$$

Wir sehen leicht, daß die Funktionen A , B , C , D , u , v nach X , Y genau so oft differenzierbar sind wie nach x , y . Jede Ordinate $x = x_0$ geht in eine Ordinate $X = x_0$ über;

¹⁾ Wir schreiben hier immer das unbestimmte Integral als Abkürzung für das bestimmte; es soll verstanden werden $\int F \, dy = \int_{y_0}^y F(xt)dt$, wo y_0 eine Konstante bedeutet; die vorkommenden Funktionen sollen immer gleich Null gesetzt werden für Punkte außerhalb des Bereiches Ω der Definition, sodaß das eben geschriebene Integral stets einen Sinn hat.

die Kurven S_1, S_2 gehen in neue Kurven $Y = \Psi_1(X), Y = \Psi_2(X)$ über, wo $\Psi_1(X), \Psi_2(X)$ wieder zweimal stetig differenzierbare Funktionen sind, und $\Psi_2(X) > \Psi_1(X)$ ¹⁾. Die Funktionen $f_0, f_1, f_2, \alpha_1, \alpha_2$ gehen in neue Funktionen desselben Charakters über. Schließlich nehmen die Gleichungen (9) selbst nach einer linearen Zusammensetzung die Gestalt

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial X} + D_1 \frac{\partial v}{\partial Y} &= A_1 u + B_1 v \\ \frac{\partial u}{\partial Y} &= C_1 u + D_1 v \end{cases}$$

an, wo

$$\begin{cases} A_1 = A - \frac{C}{\sqrt{D}} \int \frac{\partial \sqrt{D}}{\partial x} dy \\ B_1 = B - \sqrt{D} \int \frac{\partial \sqrt{D}}{\partial x} dy \\ C_1 = \frac{C}{\sqrt{D}} \\ D_1 = \sqrt{D}; \end{cases}$$

das System ist also vorläufig nicht mehr in der Normalform. Es sind jetzt die Funktionen

$$\begin{aligned} A_1; & \frac{\partial A_1}{\partial Y}; \\ B_1; & \frac{\partial B_1}{\partial X}; \frac{\partial B_1}{\partial Y}; \frac{\partial^2 B_1}{\partial Y^2}; \\ C_1; & \frac{\partial C_1}{\partial X}; \frac{\partial C_1}{\partial Y}; \frac{\partial^2 C_1}{\partial Y^2}; \\ D_1; & \frac{\partial D_1}{\partial X}; \frac{\partial D_1}{\partial Y}; \frac{\partial^2 D_1}{\partial X \partial Y}; \frac{\partial^2 D_1}{\partial Y^2}; \frac{\partial^3 D_1}{\partial Y^3}; \end{aligned}$$

stetig, und

$$D_1 > 0.$$

Wir haben noch eine Transformation der unbekanntenen Funktionen vorzunehmen; die Formel wird etwas einfacher aussehen, wenn wir die Funktionen A_1, B_1, C_1, D_1 durch

¹⁾ Es wächst nämlich Y mit y bei konstantem x .

andere, von ihnen abhängige Funktionen ersetzen; wir schreiben also

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= A_1 \\ \mathfrak{B} &= \frac{1}{2} \int \frac{B_1}{D_1} dY \\ \mathfrak{C} &= \frac{1}{2} \int C_1 dY \\ \mathfrak{D} &= \frac{1}{2} \log D_1.\end{aligned}$$

Es sind jetzt \mathfrak{A} , $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial Y}$ stetig; ferner sind \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{D} und diejenigen Ableitungen stetig, die im folgenden Schema dargestellt sind:

$$\frac{\partial}{\partial X}; \quad \frac{\partial}{\partial Y}; \quad \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y}; \quad \frac{\partial^2}{\partial Y^2}; \quad \frac{\partial^3}{\partial Y^3};$$

Die Gleichungen 9) schreiben sich:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial X} + e^{2\mathfrak{D}} \frac{\partial v}{\partial Y} = \mathfrak{A}u + e^{2\mathfrak{D}} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial Y} v \\ \frac{\partial u}{\partial Y} = 2 \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial Y} u + e^{2\mathfrak{D}} v. \end{cases}$$

Wir machen jetzt die Transformation:

$$\begin{cases} u = e^{\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D}} U \\ v = e^{\mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{D}} \left\{ V + \frac{\partial(\mathfrak{B} - \mathfrak{C} + \mathfrak{D})}{\partial Y} U \right\}. \end{cases}$$

Wir bemerken zuerst, daß eine Randbedingung der Form 1) (Gleichungen 7'') in eine Randbedingung derselben Form übergeht; dasselbe gilt auch für die Form 2). Wir haben also nur noch zuzusehen, was aus den Differentialgleichungen selbst wird. Das System kehrt in die Normalform zurück, nimmt aber jetzt die einfachere Form

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = \mathfrak{A}_1 U \\ \frac{\partial U}{\partial Y} = V \end{cases}$$

an, wobei

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} + \left\{ \frac{\partial}{\partial Y} (\mathfrak{B} - \mathfrak{C} + \mathfrak{D}) \right\}^2 - \frac{\partial^2}{\partial Y^2} (\mathfrak{B} - \mathfrak{C} + \mathfrak{D}) - \frac{\partial}{\partial X} (\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D}).$$

Wir haben also endlich genau die Form (1) erreicht; ferner sind

$$\mathfrak{A}_1, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial Y}$$

stetig, sodaß die Resultate unseres früheren Theorems unmittelbar anzuwenden sind. Wir haben also bewiesen:

Allgemeines Existenztheorem A: Das System 9) nebst den Randbedingungen 7) besitzt, falls $D > 0$, ein und nur ein System von Lösungen $u(xy)$, $v(xy)$, wobei u , v stetig, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ im Innern von Ω stetig sein sollen.

Durch die Verwandlung von x, y in $-x, -y$ und entsprechende Veränderungen in den Bezeichnungen bekommen wir ein zweites Theorem als Gegenstück zu dem vorigen:

Allgemeines Existenztheorem B: Das System 9) nebst den Randbedingungen

$$\begin{aligned} 10') \quad & u(ay) = f_0(y) \\ 10'') \quad & = 7'') \end{aligned}$$

besitzt, falls $D < 0$, ein und nur ein System von Lösungen $u(xy)$, $v(xy)$, wobei u , v stetig, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ im Innern von Ω stetig sein sollen.

Jetzt sollen zwischen den gegebenen Funktionen die Relationen:

$$\begin{aligned} 11) \quad & 1) \quad f_i(a) = f_0(\chi_i(a)) \\ & \text{resp.} \quad 2) \quad f_i(a) = f'_0(\chi_i(a)) + \alpha_i(a)f_0(\chi_i(a)) \end{aligned}$$

statthaben.

VI. Zwischen den beiden allgemeinen Existenztheoremen besteht eine auffallende Verschiedenheit. Ist $D > 0$, so haben wir die Existenz eines Lösungssystems nur links von der Charakteristik, auf welcher die Werte von u vorgeschrieben sind, bewiesen; ist $D < 0$, so haben wir die Existenz nur rechts von der Charakteristik bewiesen. Es liegt nahe, zu fragen, ob diese Einschränkung nur ein Zufall der Beweismethode sei, oder ob sie wesentlich in der Natur der Sache begründet sei.

Aus einem einfachen Fall schließen wir, daß die letztere Antwort die richtige ist. Die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

ist mit dem System

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -v \end{cases}$$

äquivalent; hier ist $D = -1 < 0$. Bekanntlich ist es möglich, durch Angabe der Temperatur zu einer gewissen Zeit $x = a$ die Temperatur zu allen späteren Zeiten zu bestimmen; diese Randwertproblemstellung entspricht dem zweiten allgemeinen Existenztheorem, von welchem sie als Grenzfall erscheint, wenn die beiden Kurven S_1, S_2 ins

Unendliche rücken. Dagegen hat Appell¹⁾ darauf aufmerksam gemacht, daß nicht jede Temperaturverteilung als Folge einer früheren Temperaturverteilung angesehen werden darf.

¹⁾ Journal de Mathématiques, Serie 4, Bd. 8 (1892), S. 187.

Lebenslauf.

Ich, Wallie Abraham Hurwitz, jüdischer Religion, amerikanischer Staatsangehörigkeit, bin geboren am 18. Februar 1886 zu Fulton, Missouri, V. St. A. als Sohn des Kaufmanns Harry Hurwitz und seiner Frau Emma, geb. Mayfield. Meinen Elementarunterricht erhielt ich in den Schulen von Joplin, Missouri. Ich studierte an der University of Missouri von 1902 bis 1906, an Harvard University von 1906 bis 1908; seit Oktober 1908 bin ich in Göttingen immatrikuliert.

Ich habe Vorlesungen resp. Uebungen und Seminare folgender Herren Professoren und Dozenten besucht:

in Missouri: Ames, Bliss, Hedrick, Ingold, Kellogg.

in Harvard: Bôcher, Bonton, Byerly, Osgood, Peirce.

in Göttingen: Hilbert, Klein, Landau, Voigt, Zermelo.

Allen diesen meinen verehrten Lehrern spreche ich meinen Dank aus. Für ihre vielseitige Anregung in Vorlesungen und im persönlichen Verkehr sowie für ihre dauernde freundliche Ermutigung bin ich den Herren Professoren Hedrick in Missouri, Osgood und Bôcher in Harvard besonders dankbar. Vor allem danke ich Herrn Geheimrat Hilbert für seine Anregung zu dieser Arbeit.

Anmerkungen der Korrekturleser.

Folgende Änderungen wurden in der Gutenberg-Fassung vorgenommen:

- §1 II.: fehlende Gleichungsnummern 4) und 8) hinzugefügt
- §1 II(7): B_{11} war B_{1n} und C_{1n} war C_1
- §1 IV(16): α_{1n} war α_{n1}
- §3 I, Formeln nach ‘Bezeichnungen:’: letzter Nenner $\partial\eta$ war ∂n
- §3 IIIb, erste Formel: erster Nenner $r(\xi\eta, xy) r(xy, x_1y_1)$ war $r(\xi\eta, xy) r(xy, x_1y_2)$
- §3 IVa, Formel nach ‘Schreiben wir:’: erster Nenner $r(\xi_1\eta_1, xy)$ war $r_1(\xi_1\eta_1, xy)$
- §3 IVa, B), Formel nach ‘wo’: erste Zeile, letzter Zähler $\partial l(s, \bar{\xi}_2\bar{\eta}_2)$ war $\partial l(s, \bar{\xi}\bar{\eta}_2)$; desgl. nächster Zähler $\partial l(\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1)$ war $\partial l(\bar{\xi}_1\bar{\eta})$
- §5 I(5): Integrand $B(x\eta) g(x) dx$ war $B(xy) g(x) dx$
- §5 I, Formel nach ‘wir haben also’: Integrand $B(x\eta) v_0(x\eta) dx$ war $B(x\eta) v_0(x\eta) du$
- §6 V, vorletzte Formel: zweiter Integrand $G(\xi_1\eta_1, \bar{\xi}_2y) \dots$ war $G(\xi_1\eta_1, \bar{\xi}_2\eta) \dots$
- §7 II, Formeln nach ‘Wir haben aber’: zweimal war erster Term $e^{\frac{(y-\eta)^2}{4(x-\xi)}}$ im Original $e^{\frac{(x-\eta)^2}{4(x-\xi)}}$

LIZENZ

End of the Project Gutenberg EBook of Randwertaufgaben bei Systemen von
linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, by Wallie Abraham Hu

*** END OF THIS PROJECT GUTENBERG EBOOK SYSTEMEN VON LINEAREN PARTIELLEN ***

***** This file should be named 33330-pdf.pdf or 33330-pdf.zip *****

This and all associated files of various formats will be found in:

<http://www.gutenberg.org/3/3/3/3/33330/>

Produced by Andrew D. Hwang, Ralf Stephan, Joshua Hutchinson
and the Online Distributed Proofreading Team at
<http://www.pgdp.net> (This file was produced from images
from the Cornell University Library: Historical Mathematics
Monographs collection.)

Updated editions will replace the previous one--the old editions
will be renamed.

Creating the works from public domain print editions means that no
one owns a United States copyright in these works, so the Foundation
(and you!) can copy and distribute it in the United States without
permission and without paying copyright royalties. Special rules,
set forth in the General Terms of Use part of this license, apply to
copying and distributing Project Gutenberg-tm electronic works to
protect the PROJECT GUTENBERG-tm concept and trademark. Project
Gutenberg is a registered trademark, and may not be used if you
charge for the eBooks, unless you receive specific permission. If you
do not charge anything for copies of this eBook, complying with the
rules is very easy. You may use this eBook for nearly any purpose
such as creation of derivative works, reports, performances and
research. They may be modified and printed and given away--you may do
practically ANYTHING with public domain eBooks. Redistribution is
subject to the trademark license, especially commercial
redistribution.

*** START: FULL LICENSE ***

THE FULL PROJECT GUTENBERG LICENSE
PLEASE READ THIS BEFORE YOU DISTRIBUTE OR USE THIS WORK

To protect the Project Gutenberg-tm mission of promoting the free

LIZENZ

distribution of electronic works, by using or distributing this work (or any other work associated in any way with the phrase "Project Gutenberg"), you agree to comply with all the terms of the Full Project Gutenberg-tm License (available with this file or online at <http://gutenberg.org/license>).

Section 1. General Terms of Use and Redistributing Project Gutenberg-tm electronic works

1.A. By reading or using any part of this Project Gutenberg-tm electronic work, you indicate that you have read, understand, agree to and accept all the terms of this license and intellectual property (trademark/copyright) agreement. If you do not agree to abide by all the terms of this agreement, you must cease using and return or destroy all copies of Project Gutenberg-tm electronic works in your possession. If you paid a fee for obtaining a copy of or access to a Project Gutenberg-tm electronic work and you do not agree to be bound by the terms of this agreement, you may obtain a refund from the person or entity to whom you paid the fee as set forth in paragraph 1.E.8.

1.B. "Project Gutenberg" is a registered trademark. It may only be used on or associated in any way with an electronic work by people who agree to be bound by the terms of this agreement. There are a few things that you can do with most Project Gutenberg-tm electronic works even without complying with the full terms of this agreement. See paragraph 1.C below. There are a lot of things you can do with Project Gutenberg-tm electronic works if you follow the terms of this agreement and help preserve free future access to Project Gutenberg-tm electronic works. See paragraph 1.E below.

1.C. The Project Gutenberg Literary Archive Foundation ("the Foundation" or PGLAF), owns a compilation copyright in the collection of Project Gutenberg-tm electronic works. Nearly all the individual works in the collection are in the public domain in the United States. If an individual work is in the public domain in the United States and you are located in the United States, we do not claim a right to prevent you from copying, distributing, performing, displaying or creating derivative works based on the work as long as all references to Project Gutenberg are removed. Of course, we hope that you will support the Project Gutenberg-tm mission of promoting free access to electronic works by freely sharing Project Gutenberg-tm works in compliance with the terms of this agreement for keeping the Project Gutenberg-tm name associated with the work. You can easily comply with the terms of this agreement by

LIZENZ

keeping this work in the same format with its attached full Project Gutenberg-tm License when you share it without charge with others.

1.D. The copyright laws of the place where you are located also govern what you can do with this work. Copyright laws in most countries are in a constant state of change. If you are outside the United States, check the laws of your country in addition to the terms of this agreement before downloading, copying, displaying, performing, distributing or creating derivative works based on this work or any other Project Gutenberg-tm work. The Foundation makes no representations concerning the copyright status of any work in any country outside the United States.

1.E. Unless you have removed all references to Project Gutenberg:

1.E.1. The following sentence, with active links to, or other immediate access to, the full Project Gutenberg-tm License must appear prominently whenever any copy of a Project Gutenberg-tm work (any work on which the phrase "Project Gutenberg" appears, or with which the phrase "Project Gutenberg" is associated) is accessed, displayed, performed, viewed, copied or distributed:

This eBook is for the use of anyone anywhere at no cost and with almost no restrictions whatsoever. You may copy it, give it away or re-use it under the terms of the Project Gutenberg License included with this eBook or online at www.gutenberg.org

1.E.2. If an individual Project Gutenberg-tm electronic work is derived from the public domain (does not contain a notice indicating that it is posted with permission of the copyright holder), the work can be copied and distributed to anyone in the United States without paying any fees or charges. If you are redistributing or providing access to a work with the phrase "Project Gutenberg" associated with or appearing on the work, you must comply either with the requirements of paragraphs 1.E.1 through 1.E.7 or obtain permission for the use of the work and the Project Gutenberg-tm trademark as set forth in paragraphs 1.E.8 or 1.E.9.

1.E.3. If an individual Project Gutenberg-tm electronic work is posted with the permission of the copyright holder, your use and distribution must comply with both paragraphs 1.E.1 through 1.E.7 and any additional terms imposed by the copyright holder. Additional terms will be linked to the Project Gutenberg-tm License for all works posted with the permission of the copyright holder found at the beginning of this work.

LIZENZ

1.E.4. Do not unlink or detach or remove the full Project Gutenberg-tm License terms from this work, or any files containing a part of this work or any other work associated with Project Gutenberg-tm.

1.E.5. Do not copy, display, perform, distribute or redistribute this electronic work, or any part of this electronic work, without prominently displaying the sentence set forth in paragraph 1.E.1 with active links or immediate access to the full terms of the Project Gutenberg-tm License.

1.E.6. You may convert to and distribute this work in any binary, compressed, marked up, nonproprietary or proprietary form, including any word processing or hypertext form. However, if you provide access to or distribute copies of a Project Gutenberg-tm work in a format other than "Plain Vanilla ASCII" or other format used in the official version posted on the official Project Gutenberg-tm web site (www.gutenberg.org), you must, at no additional cost, fee or expense to the user, provide a copy, a means of exporting a copy, or a means of obtaining a copy upon request, of the work in its original "Plain Vanilla ASCII" or other form. Any alternate format must include the full Project Gutenberg-tm License as specified in paragraph 1.E.1.

1.E.7. Do not charge a fee for access to, viewing, displaying, performing, copying or distributing any Project Gutenberg-tm works unless you comply with paragraph 1.E.8 or 1.E.9.

1.E.8. You may charge a reasonable fee for copies of or providing access to or distributing Project Gutenberg-tm electronic works provided that

- You pay a royalty fee of 20% of the gross profits you derive from the use of Project Gutenberg-tm works calculated using the method you already use to calculate your applicable taxes. The fee is owed to the owner of the Project Gutenberg-tm trademark, but he has agreed to donate royalties under this paragraph to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation. Royalty payments must be paid within 60 days following each date on which you prepare (or are legally required to prepare) your periodic tax returns. Royalty payments should be clearly marked as such and sent to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation at the address specified in Section 4, "Information about donations to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation."

LIZENZ

- You provide a full refund of any money paid by a user who notifies you in writing (or by e-mail) within 30 days of receipt that s/he does not agree to the terms of the full Project Gutenberg-tm License. You must require such a user to return or destroy all copies of the works possessed in a physical medium and discontinue all use of and all access to other copies of Project Gutenberg-tm works.
- You provide, in accordance with paragraph 1.F.3, a full refund of any money paid for a work or a replacement copy, if a defect in the electronic work is discovered and reported to you within 90 days of receipt of the work.
- You comply with all other terms of this agreement for free distribution of Project Gutenberg-tm works.

1.E.9. If you wish to charge a fee or distribute a Project Gutenberg-tm electronic work or group of works on different terms than are set forth in this agreement, you must obtain permission in writing from both the Project Gutenberg Literary Archive Foundation and Michael Hart, the owner of the Project Gutenberg-tm trademark. Contact the Foundation as set forth in Section 3 below.

1.F.

1.F.1. Project Gutenberg volunteers and employees expend considerable effort to identify, do copyright research on, transcribe and proofread public domain works in creating the Project Gutenberg-tm collection. Despite these efforts, Project Gutenberg-tm electronic works, and the medium on which they may be stored, may contain "Defects," such as, but not limited to, incomplete, inaccurate or corrupt data, transcription errors, a copyright or other intellectual property infringement, a defective or damaged disk or other medium, a computer virus, or computer codes that damage or cannot be read by your equipment.

1.F.2. LIMITED WARRANTY, DISCLAIMER OF DAMAGES - Except for the "Right of Replacement or Refund" described in paragraph 1.F.3, the Project Gutenberg Literary Archive Foundation, the owner of the Project Gutenberg-tm trademark, and any other party distributing a Project Gutenberg-tm electronic work under this agreement, disclaim all liability to you for damages, costs and expenses, including legal fees. YOU AGREE THAT YOU HAVE NO REMEDIES FOR NEGLIGENCE, STRICT LIABILITY, BREACH OF WARRANTY OR BREACH OF CONTRACT EXCEPT THOSE

LIZENZ

PROVIDED IN PARAGRAPH F3. YOU AGREE THAT THE FOUNDATION, THE TRADEMARK OWNER, AND ANY DISTRIBUTOR UNDER THIS AGREEMENT WILL NOT BE LIABLE TO YOU FOR ACTUAL, DIRECT, INDIRECT, CONSEQUENTIAL, PUNITIVE OR INCIDENTAL DAMAGES EVEN IF YOU GIVE NOTICE OF THE POSSIBILITY OF SUCH DAMAGE.

1.F.3. LIMITED RIGHT OF REPLACEMENT OR REFUND - If you discover a defect in this electronic work within 90 days of receiving it, you can receive a refund of the money (if any) you paid for it by sending a written explanation to the person you received the work from. If you received the work on a physical medium, you must return the medium with your written explanation. The person or entity that provided you with the defective work may elect to provide a replacement copy in lieu of a refund. If you received the work electronically, the person or entity providing it to you may choose to give you a second opportunity to receive the work electronically in lieu of a refund. If the second copy is also defective, you may demand a refund in writing without further opportunities to fix the problem.

1.F.4. Except for the limited right of replacement or refund set forth in paragraph 1.F.3, this work is provided to you 'AS-IS' WITH NO OTHER WARRANTIES OF ANY KIND, EXPRESS OR IMPLIED, INCLUDING BUT NOT LIMITED TO WARRANTIES OF MERCHANTABILITY OR FITNESS FOR ANY PURPOSE.

1.F.5. Some states do not allow disclaimers of certain implied warranties or the exclusion or limitation of certain types of damages. If any disclaimer or limitation set forth in this agreement violates the law of the state applicable to this agreement, the agreement shall be interpreted to make the maximum disclaimer or limitation permitted by the applicable state law. The invalidity or unenforceability of any provision of this agreement shall not void the remaining provisions.

1.F.6. INDEMNITY - You agree to indemnify and hold the Foundation, the trademark owner, any agent or employee of the Foundation, anyone providing copies of Project Gutenberg-tm electronic works in accordance with this agreement, and any volunteers associated with the production, promotion and distribution of Project Gutenberg-tm electronic works, harmless from all liability, costs and expenses, including legal fees, that arise directly or indirectly from any of the following which you do or cause to occur: (a) distribution of this or any Project Gutenberg-tm work, (b) alteration, modification, or additions or deletions to any Project Gutenberg-tm work, and (c) any Defect you cause.

Section 2. Information about the Mission of Project Gutenberg-tm

Project Gutenberg-tm is synonymous with the free distribution of electronic works in formats readable by the widest variety of computers including obsolete, old, middle-aged and new computers. It exists because of the efforts of hundreds of volunteers and donations from people in all walks of life.

Volunteers and financial support to provide volunteers with the assistance they need, are critical to reaching Project Gutenberg-tm's goals and ensuring that the Project Gutenberg-tm collection will remain freely available for generations to come. In 2001, the Project Gutenberg Literary Archive Foundation was created to provide a secure and permanent future for Project Gutenberg-tm and future generations. To learn more about the Project Gutenberg Literary Archive Foundation and how your efforts and donations can help, see Sections 3 and 4 and the Foundation web page at <http://www.pgla.org>.

Section 3. Information about the Project Gutenberg Literary Archive Foundation

The Project Gutenberg Literary Archive Foundation is a non profit 501(c)(3) educational corporation organized under the laws of the state of Mississippi and granted tax exempt status by the Internal Revenue Service. The Foundation's EIN or federal tax identification number is 64-6221541. Its 501(c)(3) letter is posted at <http://pglaf.org/fundraising>. Contributions to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation are tax deductible to the full extent permitted by U.S. federal laws and your state's laws.

The Foundation's principal office is located at 4557 Melan Dr. S. Fairbanks, AK, 99712., but its volunteers and employees are scattered throughout numerous locations. Its business office is located at 809 North 1500 West, Salt Lake City, UT 84116, (801) 596-1887, email business@pglaf.org. Email contact links and up to date contact information can be found at the Foundation's web site and official page at <http://pglaf.org>

For additional contact information:

Dr. Gregory B. Newby
Chief Executive and Director
gbnewby@pglaf.org

Section 4. Information about Donations to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation

Project Gutenberg-tm depends upon and cannot survive without wide spread public support and donations to carry out its mission of increasing the number of public domain and licensed works that can be freely distributed in machine readable form accessible by the widest array of equipment including outdated equipment. Many small donations (\$1 to \$5,000) are particularly important to maintaining tax exempt status with the IRS.

The Foundation is committed to complying with the laws regulating charities and charitable donations in all 50 states of the United States. Compliance requirements are not uniform and it takes a considerable effort, much paperwork and many fees to meet and keep up with these requirements. We do not solicit donations in locations where we have not received written confirmation of compliance. To SEND DONATIONS or determine the status of compliance for any particular state visit <http://pglaf.org>

While we cannot and do not solicit contributions from states where we have not met the solicitation requirements, we know of no prohibition against accepting unsolicited donations from donors in such states who approach us with offers to donate.

International donations are gratefully accepted, but we cannot make any statements concerning tax treatment of donations received from outside the United States. U.S. laws alone swamp our small staff.

Please check the Project Gutenberg Web pages for current donation methods and addresses. Donations are accepted in a number of other ways including checks, online payments and credit card donations. To donate, please visit: <http://pglaf.org/donate>

Section 5. General Information About Project Gutenberg-tm electronic works.

Professor Michael S. Hart is the originator of the Project Gutenberg-tm concept of a library of electronic works that could be freely shared with anyone. For thirty years, he produced and distributed Project Gutenberg-tm eBooks with only a loose network of volunteer support.

LIZENZ

Project Gutenberg-tm eBooks are often created from several printed editions, all of which are confirmed as Public Domain in the U.S. unless a copyright notice is included. Thus, we do not necessarily keep eBooks in compliance with any particular paper edition.

Most people start at our Web site which has the main PG search facility:

<http://www.gutenberg.org>

This Web site includes information about Project Gutenberg-tm, including how to make donations to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation, how to help produce our new eBooks, and how to subscribe to our email newsletter to hear about new eBooks.